Terminale · maths expertes · DM

DM n°02 — Ce que cache (1+i)^n

CHAPITRES

Nombres complexes · Binôme de Newton · Dénombrement

> *On part d'une puissance qui paraît très simple. En la regardant de plusieurs façons, on va faire apparaître une structure qu'un calcul direct laisse difficilement deviner.*

Dans tout le problème, on utilise seulement les premières règles de calcul sur les nombres complexes, en particulier $i^2 = -1$.

I Une puissance à observer

1 Calculer sous forme algébrique

$$(1+i), \qquad (1+i)^2, \qquad (1+i)^3, \qquad (1+i)^4.$$

Sans recommencer les calculs depuis le début, en déduire ensuite

$$(1+i)^5, \qquad (1+i)^6, \qquad (1+i)^7, \qquad (1+i)^8.$$

Conjecturer une relation simple entre $(1+i)^{n+4}$ et $(1+i)^n$.

Pour tout entier naturel n, on écrit désormais

$$(1+i)^n = A_n + iB_n,$$

où A_n et B_n sont réels.

2 Démontrer la relation conjecturée à la question précédente. Tout entier naturel n peut s'écrire

$$n = 4q + r, \qquad q \in \mathbb{N}, \quad r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Déterminer $(1+i)^n$, puis A_n et B_n, dans chacun des quatre cas possibles pour r.

II La même puissance, autrement

On pourra utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

la somme obtenue en conservant les indices pairs inférieurs ou égaux à n, et

$$T_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$$

la somme analogue portant sur les indices impairs. On convient que $T_0 = 0$.

3 Développer $(1+i)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis regrouper les termes selon la parité de leur indice. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = S_n \qquad \text{et} \qquad B_n = T_n.$$

4 En confrontant les deux façons de calculer $(1+i)^n$, déterminer exactement S_n et T_n lorsque

$$n = 4q, \qquad 4q+1, \qquad 4q+2, \qquad 4q+3.$$

III Deux sommes, une seule identité

5 En utilisant $(1+i)^{n+1}$, exprimer A_{n+1} et B_{n+1} en fonction de A_n et B_n. En déduire que la suite

$$C_n = A_n^2 + B_n^2$$

est géométrique, puis déterminer C_n. Traduire le résultat obtenu à l'aide de S_n et T_n.

Prérequis pour la partie IV. Cette partie suppose connu le chapitre de dénombrement de Terminale spécialité mathématiques : coefficients binomiaux et nombre de parties d'un ensemble fini.

IV Ce que comptent ces sommes

Soit $n \geq 2$ et soit E un ensemble à n éléments. Pour $r \in \{0,1,2,3\}$, on note N_r le nombre de parties de E dont le cardinal est de la forme $4q+r$, avec $q \in \mathbb{N}$.

6 **(a)** À l'aide de la signification combinatoire de $\binom{n}{k}$, montrer que

$$S_n = N_0 - N_2 \qquad \text{et} \qquad T_n = N_1 - N_3.$$

(b) Fixer un élément $x \in E$. À chaque partie de E ne contenant pas x, associer la partie obtenue en lui ajoutant x. Expliquer pourquoi cela permet de partager les parties de E en paires formées d'une partie de cardinal pair et d'une partie de cardinal impair. En déduire que

$$N_0 + N_2 = N_1 + N_3 = 2^{n-1}.$$

(c) Exprimer chacun des quatre nombres N_0, N_1, N_2, N_3 en fonction de S_n, T_n et d'une puissance de 2.

(d) Réécrire l'identité obtenue à la question 5 uniquement à l'aide de N_0, N_1, N_2, N_3. Que représente le membre de droite ? Que mesurent les deux différences qui apparaissent dans le membre de gauche ?

V Un ensemble de 1000 éléments

7 **(a)** Sans calculer individuellement aucun coefficient binomial, déterminer exactement

$$\Sigma = \binom{1000}{0} - \binom{1000}{2} + \binom{1000}{4} - \cdots + \binom{1000}{1000}$$

et

$$\Theta = \binom{1000}{1} - \binom{1000}{3} + \binom{1000}{5} - \cdots - \binom{1000}{999}.$$

(b) On considère maintenant un ensemble à 1000 éléments. Déterminer exactement le nombre de ses parties dont le cardinal est de la forme $4q$, $4q+1$, $4q+2$ puis $4q+3$.