CORRIGÉ

Terminale · maths expertes · CORRIGÉ

DM n°02 — Ce que cache (1+i)^n

CHAPITRES

Nombres complexes · Binôme de Newton · Dénombrement

I Une puissance à observer

1

On calcule successivement

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i,$$

puis

$$(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2 + 2i,$$

et

$$(1+i)^4 = (-2+2i)(1+i) = -4.$$

Cette dernière égalité permet d'obtenir

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= -4(1+i) = -4 - 4i,\\ (1+i)^6 &= -4(1+i)^2 = -8i,\\ (1+i)^7 &= -4(1+i)^3 = 8 - 8i,\\ (1+i)^8 &= -4(1+i)^4 = 16.\end{aligned}$$

Les quatre nouvelles valeurs sont donc obtenues en multipliant les quatre précédentes par -4. On conjecture

$$\boxed{(1+i)^{n+4} = -4(1+i)^n}.$$

2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+i)^{n+4} = (1+i)^n (1+i)^4 = -4(1+i)^n.$$

Si $n = 4q + r$ avec $r \in \{0,1,2,3\}$, alors

$$(1+i)^n = \big((1+i)^4\big)^q (1+i)^r = (-4)^q (1+i)^r.$$

On obtient alors :

- si $n = 4q$,

$$(1+i)^n = (-4)^q, \qquad A_n = (-4)^q, \qquad B_n = 0;$$

- si $n = 4q + 1$,
$$(1+i)^n = (-4)^q(1+i), \qquad A_n = B_n = (-4)^q;$$
- si $n = 4q + 2$,
$$(1+i)^n = 2i(-4)^q, \qquad A_n = 0, \qquad B_n = 2(-4)^q;$$
- si $n = 4q + 3$,
$$(1+i)^n = (-2+2i)(-4)^q, \qquad A_n = -2(-4)^q, \qquad B_n = 2(-4)^q.$$

II La même puissance, autrement

3

La formule du binôme de Newton donne
$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k.$$
Pour $j \in \mathbb{N}$,
$$i^{2j} = (i^2)^j = (-1)^j, \qquad i^{2j+1} = i(i^2)^j = i(-1)^j.$$
Les termes d'indice pair forment donc la partie réelle
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = S_n,$$
et les termes d'indice impair forment la partie imaginaire
$$i\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots\right) = iT_n.$$
Ainsi
$$(1+i)^n = S_n + iT_n.$$
Comme $(1+i)^n = A_n + iB_n$, l'égalité de deux nombres complexes donne
$$\boxed{A_n = S_n, \qquad B_n = T_n}.$$
Pour $n = 0$, cela reste vrai puisque $S_0 = 1$ et $T_0 = 0$.

4

En combinant les questions 2 et 3,
$$\boxed{S_{4q} = (-4)^q, \qquad T_{4q} = 0},$$
$$\boxed{S_{4q+1} = (-4)^q, \qquad T_{4q+1} = (-4)^q},$$
$$\boxed{S_{4q+2} = 0, \qquad T_{4q+2} = 2(-4)^q},$$
$$\boxed{S_{4q+3} = -2(-4)^q, \qquad T_{4q+3} = 2(-4)^q}.$$

III Deux sommes, une seule identité

5

À partir de

$$(1+i)^{n+1} = (1+i)(A_n + iB_n),$$

on obtient

$$(1+i)^{n+1} = (A_n - B_n) + i(A_n + B_n).$$

Par identification des parties réelle et imaginaire,

$$A_{n+1} = A_n - B_n, \qquad B_{n+1} = A_n + B_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= A_{n+1}^2 + B_{n+1}^2 \\ &= (A_n - B_n)^2 + (A_n + B_n)^2 \\ &= 2(A_n^2 + B_n^2) = 2C_n. \end{aligned}$$

La suite (C_n) est donc géométrique de raison 2. Comme

$$C_0 = A_0^2 + B_0^2 = 1,$$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A_n^2 + B_n^2 = 2^n}.$$

Avec $A_n = S_n$ et $B_n = T_n$, cela devient

$$\boxed{S_n^2 + T_n^2 = 2^n}.$$

IV Ce que comptent ces sommes

6

(a) Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, le coefficient $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E ayant exactement k éléments. Ainsi,

$$N_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots, \qquad N_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \cdots.$$

En soustrayant,

$$\boxed{S_n = N_0 - N_2}.$$

De même,

$$\boxed{T_n = N_1 - N_3}.$$

(b) Fixons $x \in E$. Toute partie F ne contenant pas x est appariée avec $F \cup \{x\}$. Ces deux parties ont des cardinaux consécutifs : l'une est paire et l'autre impaire. Réciproquement, chaque partie de E appartient à une unique paire de cette forme.

Il y a autant de telles paires que de parties de $E \setminus \{x\}$, soit 2^{n-1}. Chaque paire contient exactement une partie de cardinal pair et une de cardinal impair. Donc

$$\boxed{N_0 + N_2 = N_1 + N_3 = 2^{n-1}}.$$

(c) On dispose des deux systèmes

$$N_0 + N_2 = 2^{n-1}, \qquad N_0 - N_2 = S_n,$$

et

$$N_1 + N_3 = 2^{n-1}, \qquad N_1 - N_3 = T_n.$$

En les résolvant,

$$\boxed{N_0 = 2^{n-2} + \frac{S_n}{2}}, \qquad \boxed{N_2 = 2^{n-2} - \frac{S_n}{2}},$$

$$\boxed{N_1 = 2^{n-2} + \frac{T_n}{2}}, \qquad \boxed{N_3 = 2^{n-2} - \frac{T_n}{2}}.$$

(d) Puisque $S_n = N_0 - N_2$ et $T_n = N_1 - N_3$, l'identité de la question 5 devient

$$\boxed{(N_0 - N_2)^2 + (N_1 - N_3)^2 = N_0 + N_1 + N_2 + N_3.}$$

Le membre de droite est le nombre total de parties de E, donc 2^n.

Les deux différences du membre de gauche mesurent deux déséquilibres : le premier entre les parties dont le cardinal est de la forme $4q$ et celles dont le cardinal est de la forme $4q+2$; le second entre les parties de cardinal $4q+1$ et celles de cardinal $4q+3$.

IDÉE Sous cette forme, l'identité est combinatoire, mais une preuve directe n'est pas évidente : le membre de gauche contient des différences puis des carrés, donc des annulations. Les nombres complexes encodent précisément ces annulations par le cycle $1, i, -1, -i$ des puissances de i.

V Un ensemble de 1000 éléments

7

(a) Comme

$$1000 = 4 \times 250,$$

la question 4 donne

$$\Sigma = S_{1000} = (-4)^{250} = 4^{250} = 2^{500},$$

donc

$$\boxed{\Sigma = 2^{500}}.$$

Cette somme comporte 501 coefficients binomiaux, mais aucun n'a été calculé individuellement.

Toujours parce que $1000 = 4 \times 250$,

$$\Theta = T_{1000} = 0,$$

donc

$$\boxed{\Theta = 0}.$$

(b) Pour un ensemble à 1000 éléments, les formules de la question 6 donnent

$$\begin{aligned} N_0 &= 2^{998} + \frac{2^{500}}{2} = 2^{998} + 2^{499}, \\ N_2 &= 2^{998} - \frac{2^{500}}{2} = 2^{998} - 2^{499}, \\ N_1 &= 2^{998} + \frac{0}{2} = 2^{998}, \\ N_3 &= 2^{998} - \frac{0}{2} = 2^{998}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{N_0 = 2^{998} + 2^{499}}, \qquad \boxed{N_1 = 2^{998}},$$
$$\boxed{N_2 = 2^{998} - 2^{499}}, \qquad \boxed{N_3 = 2^{998}}.$$

En particulier, parmi les 2^{1000} parties d'un ensemble à 1000 éléments, exactement

$$\boxed{2^{998} + 2^{499}}$$

ont un cardinal divisible par 4.