Terminale · spécialité maths · DM

DM n°02 — Le dernier montant impossible

CHAPITRES

Raisonnement par récurrence · Suites

> *Dans un pays imaginaire, seules existent des pièces de 5 et de 8 centimes. Certains montants sont faciles à payer, d'autres semblent impossibles. Le but est de déterminer le dernier montant impossible, tout en explorant plusieurs façons de construire et de comprendre un raisonnement par récurrence. On note* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

I Cinq chaînes, un seul principe

On dira qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ est **atteignable** s'il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$n = 5x + 8y.$$

Autrement dit, n est atteignable s'il peut être payé exactement avec des pièces de 5 et de 8 centimes.

1 Explorer les montants entiers de 20 à 32 centimes : rechercher, pour chacun d'eux, une écriture $n = 5x+8y$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ lorsqu'une telle écriture semble exister. Relever les montants qui résistent à vos essais et formuler une conjecture sur le plus grand montant impossible.

Pour tout entier n, on note désormais P_n la proposition : « n est atteignable ».

2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+5}$. Expliquer pourquoi P_{28} et cette seule implication ne permettent pas de conclure que tous les entiers supérieurs ou égaux à 28 sont atteignables.

3 Pour $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ fixé, on considère la proposition

$$A_k^{(r)} : \qquad P_{28+r+5k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(a) Démontrer par récurrence sur k que $A_k^{(0)}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Adapter ce raisonnement aux quatre autres valeurs de r.

(c) En déduire que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 28$.

Rappel. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la division euclidienne par 5 permet d'écrire $N = 5q + r$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On pourra appliquer ce résultat à $N = n - 28$.

4 Démontrer que 27 n'est pas atteignable. Conclure quant à la conjecture de la question 1.

II Gagner exactement un centime

La partie précédente a utilisé cinq chaînes de récurrence parallèles. On cherche maintenant une preuve qui parte d'un seul cas initial et passe directement d'un montant au suivant.

5 Trouver deux échanges de pièces qui augmentent le montant total d'exactement 1 centime : l'un en remplaçant uniquement des pièces de 5 par des pièces de 8, l'autre en remplaçant uniquement des pièces de 8 par des pièces de 5. Traduire ces deux échanges par deux égalités numériques.

6 Soit n un entier tel que $n \geq 28$. Supposons P_n vraie. Ainsi, il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $n = 5x + 8y$.

(a) Montrer que si $x \geq 3$, alors P_{n+1} est vraie.

(b) Montrer que si $x \leq 2$ et $y \leq 2$, alors $n \leq 26$.

(c) En déduire que, si $x \leq 2$, on a nécessairement $y \geq 3$, puis établir encore P_{n+1}.

(d) Rédiger une démonstration complète par récurrence de la propriété : « pour tout entier $n \geq 28$, P_n est vraie ».

7 Dans la récurrence précédente, P_n fournit l'existence de deux entiers x et y, et pas seulement une affirmation vraie. Expliquer comment ces deux « témoins » sont transformés pour construire le rang suivant.

III Quand le rang précédent ne suffit pas

Principe de récurrence forte. Pour démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on vérifie d'abord les cas initiaux nécessaires. L'hérédité consiste ensuite à établir que, pour tout entier n à partir du dernier rang initial, si toutes les propriétés $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_n$ sont vraies, alors P_{n+1} est vraie.

8 Retrouver le résultat « tout entier $n \geq 28$ est atteignable » par récurrence forte.

(a) Vérifier explicitement $P_{28}, P_{29}, P_{30}, P_{31}$ et P_{32}.

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 32$. Supposons vraies toutes les propriétés $P_{28}, P_{29}, \ldots, P_n$. Montrer que P_{n+1} est vraie en utilisant un montant déjà connu et une seule pièce supplémentaire.

(c) Conclure.

9 Pourquoi l'hypothèse ordinaire « P_n est vraie » ne suffit-elle pas, à elle seule, pour reproduire exactement la preuve de la question 8 ?

Pour $n \geq 32$, on définit

$$Q_n : \qquad P_{28}, P_{29}, \ldots \text{ et } P_n \text{ sont toutes vraies.}$$

10 Montrer que Q_{32} est vraie puis que, pour tout $n \geq 32$, $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$. En déduire qu'ici la récurrence forte se ramène à une récurrence ordinaire sur une propriété plus riche.

IV Changer de monnaie

Dans un second pays, seules existent des pièces de 6 et de 11 centimes. On note R_n la proposition : « n peut être payé avec des pièces de 6 et de 11 centimes ».

11 Montrer que les six montants 50, 51, 52, 53, 54, 55 sont atteignables. Ces calculs suggèrent-ils un candidat naturel pour le dernier montant impossible ?

12 Trouver deux échanges de pièces de 6 et de 11 centimes qui augmentent le total d'exactement 1 centime. En déduire par récurrence ordinaire que R_n est vraie pour tout $n \geq 50$, à partir de R_{50}.

13 Redémontrer ce résultat par récurrence forte, à partir des six cas de la question 11 et du fait qu'ajouter une pièce de 6 conserve l'atteignabilité.

14 Démontrer que 49 n'est pas atteignable. Quel est donc le dernier montant impossible avec des pièces de 6 et de 11 centimes ?

15 Comparer les deux derniers montants impossibles aux valeurs des pièces et conjecturer une formule pour deux entiers $a, b \geq 2$ n'ayant aucun facteur commun supérieur à 1. Aucune preuve générale n'est demandée.