CORRIGÉ

Terminale · spécialité maths · CORRIGÉ

DM n°02 — Le dernier montant impossible

CHAPITRES

Raisonnement par récurrence · Suites

I Cinq chaînes, un seul principe

1

On cherche les écritures $n = 5x + 8y$ avec $x, y \in \mathbb{N}$. Entre 20 et 32, une recherche systématique donne par exemple :

$$\begin{aligned} &20 = 4 \times 5, && 21 = 5 + 2 \times 8,\\ &22 : \text{ impossible}, && 23 = 3 \times 5 + 8,\\ &24 = 3 \times 8, && 25 = 5 \times 5,\\ &26 = 2 \times 5 + 2 \times 8, && 27 : \text{ impossible},\\ &28 = 4 \times 5 + 8, && 29 = 5 + 3 \times 8,\\ &30 = 6 \times 5, && 31 = 3 \times 5 + 2 \times 8,\\ &32 = 4 \times 8. \end{aligned}$$

Pour 22 et 27, un balayage des quelques valeurs possibles de y ne fournit aucune écriture. La suite $28, 29, 30, 31, 32$ est constituée de cinq montants consécutifs atteignables. À ce stade, on conjecture donc que 27 est le plus grand montant impossible ; la question 4 en donnera une preuve rigoureuse.

2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie. Il existe donc $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$n = 5x + 8y.$$

Alors

$$n + 5 = 5(x + 1) + 8y,$$

et $x + 1, y \in \mathbb{N}$. Donc P_{n+5} est vraie. Ainsi

$$P_n \Rightarrow P_{n+5}.$$

En revanche, en partant seulement de P_{28}, on obtient

$$P_{33}, P_{38}, P_{43}, \ldots$$

mais pas P_{29}, P_{30}, P_{31} ou P_{32}. Une hérédité de pas 5 ne parcourt donc qu'une seule des cinq chaînes possibles ; il faut cinq points de départ pour couvrir tous les entiers à partir de 28.

3

(a) Pour $r = 0$, posons

$$A_k^{(0)} : P_{28+5k}.$$

Initialisation. Pour $k = 0$, $28 = 4 \times 5 + 8$, donc P_{28} est vraie. Ainsi $A_0^{(0)}$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $A_k^{(0)}$ vraie, c'est-à-dire P_{28+5k} vraie. D'après la question 2,

$$P_{28+5k} \Rightarrow P_{28+5k+5} = P_{28+5(k+1)}.$$

Donc $A_{k+1}^{(0)}$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $A_k^{(0)}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Fixons $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Les initialisations sont respectivement

$$29 = 5 + 3 \times 8, \qquad 30 = 6 \times 5, \qquad 31 = 3 \times 5 + 2 \times 8, \qquad 32 = 4 \times 8.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P_{28+r+5k}$ vraie. D'après la question 2,

$$P_{28+r+5k} \Rightarrow P_{28+r+5k+5} = P_{28+r+5(k+1)}.$$

L'hérédité est donc établie pour cette valeur arbitraire de r. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P_{28+5k},\ P_{29+5k},\ P_{30+5k},\ P_{31+5k},\ P_{32+5k}$$

sont vraies.

(c) Soit $n \geq 28$. Effectuons la division euclidienne de $n - 28$ par 5 : il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tels que

$$n - 28 = 5k + r.$$

Ainsi

$$n = 28 + r + 5k.$$

La proposition correspondante a été démontrée en (a) ou (b), donc P_n est vraie. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq 28 \Rightarrow P_n.$$

4

Supposons, pour obtenir une contradiction, que 27 soit atteignable. Il existerait $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$27 = 5x + 8y.$$

Comme $8y \leq 27$, on a nécessairement $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. On examine ces quatre cas :

$$27 - 8y \in \{27, 19, 11, 3\}.$$

Aucun de ces quatre entiers n'est un multiple de 5. Il est donc impossible d'avoir $5x = 27 - 8y$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Ainsi 27 n'est pas atteignable. Comme tous les entiers $n \geq 28$ le sont d'après la question 3, on a bien

$$\boxed{\text{27 est le dernier montant impossible.}}$$

II Gagner exactement un centime

5

On cherche d'abord à remplacer des pièces de 5 par des pièces de 8 tout en augmentant le total de 1. Or

$$2 \times 8 = 16 = 15 + 1 = 3 \times 5 + 1.$$

Donc remplacer trois pièces de 5 par deux pièces de 8 augmente le total de 1 centime.

Dans l'autre sens,

$$5 \times 5 = 25 = 24 + 1 = 3 \times 8 + 1.$$

Donc remplacer trois pièces de 8 par cinq pièces de 5 augmente également le total de 1 centime.

Les deux égalités utiles sont donc

$$2 \times 8 = 3 \times 5 + 1 \qquad \text{et} \qquad 5 \times 5 = 3 \times 8 + 1.$$

6

Soit n un entier tel que $n \geq 28$. Supposons P_n vraie. Il existe donc $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$n = 5x + 8y.$$

(a) Si $x \geq 3$, alors $x - 3 \in \mathbb{N}$ et $y + 2 \in \mathbb{N}$. De plus,

$$5(x-3) + 8(y+2) = 5x + 8y - 15 + 16 = n + 1.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

(b) Si $x \leq 2$ et $y \leq 2$, alors

$$n = 5x + 8y \leq 5 \times 2 + 8 \times 2 = 26.$$

(c) Or on sait que $n \geq 28$. Le cas $x \leq 2$ et $y \leq 2$ est donc impossible. Par conséquent, si $x \leq 2$, il faut nécessairement avoir $y \geq 3$.

Dans ce cas, $x + 5 \in \mathbb{N}$ et $y - 3 \in \mathbb{N}$, et

$$5(x+5) + 8(y-3) = 5x + 8y + 25 - 24 = n + 1.$$

Donc P_{n+1} est encore vraie.

Ainsi, quelle que soit la représentation $n = 5x + 8y$, l'une des deux transformations permet d'obtenir une représentation de $n + 1$.

(d) On rédige maintenant la récurrence complète.

Propriété. Pour $n \geq 28$, P_n signifie : « il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $n = 5x + 8y$ ».

Initialisation. On a

$$28 = 4 \times 5 + 1 \times 8,$$

Donc P_{28} est vraie.

Hérédité. Soit n un entier tel que $n \geq 28$. Supposons P_n vraie. Il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $n = 5x + 8y$. Si $x \geq 3$, la question (a) donne P_{n+1}. Si $x \leq 2$, alors la question (b), combinée à $n \geq 28$, impose $y \geq 3$, et la question (c) donne encore P_{n+1}. Dans tous les cas, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Conclusion. Par récurrence,

$$P_n \text{ est vraie pour tout entier } n \geq 28.$$

7

L'hypothèse P_n affirme l'existence d'une représentation

$$n = 5x + 8y.$$

Les entiers x et y sont donc des témoins de l'atteignabilité de n.

Si $x \geq 3$, on transforme le couple (x, y) en

$$(x - 3, y + 2),$$

ce qui augmente la valeur totale de 1. Si $x \leq 2$, alors la taille de n force $y \geq 3$, et on transforme le couple en

$$(x + 5, y - 3).$$

Dans les deux cas, l'hypothèse de récurrence fournit des objets concrets que l'on modifie pour fabriquer ceux du rang suivant. C'est l'utilisation effective de l'hypothèse qui constitue le cœur de l'hérédité.

III Quand le rang précédent ne suffit pas

8

(a) On a déjà les cinq représentations

$$28 = 4 \times 5 + 8, \qquad 29 = 5 + 3 \times 8,$$
$$30 = 6 \times 5, \qquad 31 = 3 \times 5 + 2 \times 8,$$
$$32 = 4 \times 8.$$

Donc $P_{28}, P_{29}, P_{30}, P_{31}, P_{32}$ sont vraies.

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 32$. Supposons vraies toutes les propriétés

$$P_{28}, P_{29}, \ldots, P_n.$$

Comme $n \geq 32$, on a

$$n - 4 \geq 28.$$

De plus $n - 4 \leq n$, donc P_{n-4} fait partie des propriétés supposées vraies. Il existe donc $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$n - 4 = 5x + 8y.$$

En ajoutant une pièce de 5,

$$n+1 = (n-4)+5 = 5(x+1)+8y.$$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

(c) Les cinq cas initiaux sont vrais et l'hérédité forte est établie. Par récurrence forte,

$$P_n \text{ est vraie pour tout entier } n \geq 28.$$

9

La preuve de la question 8 ne se sert pas de P_n pour construire P_{n+1}. Elle se sert de P_{n-4}.

Or l'hypothèse ordinaire « P_n est vraie » ne contient aucune information sur P_{n-4}. La récurrence forte fournit précisément cette information, puisqu'elle suppose simultanément vraies toutes les propriétés depuis le premier rang considéré jusqu'au rang n.

Cela ne signifie pas que la récurrence ordinaire est moins puissante : on peut enrichir la propriété sur laquelle on effectue la récurrence, ce qui est l'objet de la question suivante.

10

Par définition,

$$Q_{32} : P_{28}, P_{29}, P_{30}, P_{31}, P_{32} \text{ sont toutes vraies.}$$

La question 8(a) montre donc que Q_{32} est vraie.

Soit maintenant n un entier tel que $n \geq 32$. Supposons Q_n vraie. On sait alors en particulier que P_{n-4} est vraie, puisque $28 \leq n-4 \leq n$. Comme dans la question 8, on ajoute une pièce de 5 et on obtient P_{n+1}.

L'hypothèse Q_n contenait déjà $P_{28}, \ldots, P_n$; en ajoutant P_{n+1}, on obtient donc Q_{n+1}. Ainsi

$$Q_n \Rightarrow Q_{n+1}.$$

Par récurrence ordinaire, Q_n est vraie pour tout $n \geq 32$. Cela entraîne en particulier P_n pour tout $n \geq 28$.

La récurrence forte de la question 8 peut donc être vue ici comme une récurrence ordinaire sur la propriété renforcée

$$Q_n = P_{28} \wedge P_{29} \wedge \cdots \wedge P_n.$$

IDÉE Une difficulté fréquente en récurrence vient d'une hypothèse trop pauvre. Lorsqu'elle ne contient pas assez d'information pour construire le rang suivant, une stratégie générale consiste à renforcer la propriété que l'on veut transmettre.

IV Changer de monnaie

11

On vérifie :

$$50 = 6 + 4\times 11, \qquad 51 = 3\times 6 + 3\times 11,$$
$$52 = 5\times 6 + 2\times 11, \qquad 53 = 7\times 6 + 11,$$
$$54 = 9\times 6, \qquad 55 = 5\times 11.$$

On dispose donc de six montants consécutifs atteignables à partir de 50. Cela suggère fortement que 49 pourrait être le dernier montant impossible.

12

Deux échanges augmentant le total de 1 sont particulièrement simples :

$$2 \times 6 = 12 = 11 + 1,$$

donc remplacer une pièce de 11 par deux pièces de 6 fait gagner 1 centime ; et

$$5 \times 11 = 55 = 54 + 1 = 9 \times 6 + 1,$$

donc remplacer neuf pièces de 6 par cinq pièces de 11 fait également gagner 1 centime.

Montrons par récurrence que R_n est vraie pour tout $n \geq 50$.

Initialisation. $50 = 6 + 4 \times 11$, donc R_{50} est vraie.

Hérédité. Soit n un entier tel que $n \geq 50$. Supposons R_n vraie. Il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$n = 6x + 11y.$$

Si $y \geq 1$, on remplace une pièce de 11 par deux pièces de 6 :

$$n + 1 = 6(x + 2) + 11(y - 1),$$

donc R_{n+1} est vraie.

Si $y = 0$, alors $n = 6x \geq 50$. Comme x est entier, on a nécessairement $x \geq 9$. On peut alors remplacer neuf pièces de 6 par cinq pièces de 11 :

$$n + 1 = 6(x - 9) + 11(y + 5) = 6(x - 9) + 55.$$

Les coefficients sont non négatifs, donc R_{n+1} est encore vraie.

Dans tous les cas, $R_n \Rightarrow R_{n+1}$. Par récurrence,

$$R_n \text{ est vraie pour tout entier } n \geq 50.$$

13

Les six cas initiaux $R_{50}, R_{51}, \ldots, R_{55}$ sont vrais d'après la question 11.

Soit n un entier tel que $n \geq 55$. Supposons vraies toutes les propriétés

$$R_{50}, R_{51}, \ldots, R_n.$$

Alors

$$n - 5 \geq 50$$

et $n - 5 \leq n$, donc R_{n-5} est vraie. Il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$n - 5 = 6x + 11y.$$

En ajoutant une pièce de 6,

$$n + 1 = (n - 5) + 6 = 6(x + 1) + 11y.$$

Donc R_{n+1} est vraie.

Par récurrence forte,

$$R_n \text{ est vraie pour tout entier } n \geq 50.$$

Cette preuve demande six cas initiaux mais son hérédité est très courte. La preuve ordinaire de la question 12 ne demande qu'un seul cas initial, mais son hérédité exige une analyse des représentations disponibles.

14

Supposons que 49 soit atteignable :

$$49 = 6x + 11y,$$

avec $x, y \in \mathbb{N}$. Comme $11y \leq 49$, on a $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Alors

$$49 - 11y \in \{49, 38, 27, 16, 5\}.$$

Aucun de ces nombres n'est divisible par 6. Il n'existe donc pas de $x \in \mathbb{N}$ satisfaisant l'égalité.

Ainsi 49 n'est pas atteignable, tandis que tout entier $n \geq 50$ l'est. Donc

$$\boxed{49 \text{ est le dernier montant impossible.}}$$

15

Pour les pièces de 5 et 8, le dernier montant impossible vaut

$$27 = 5 \times 8 - 5 - 8.$$

Pour les pièces de 6 et 11,

$$49 = 6 \times 11 - 6 - 11.$$

On est donc naturellement conduit à conjecturer que, pour deux entiers $a, b \geq 2$ sans facteur commun autre que 1, le dernier montant impossible est

$$ab - a - b.$$

Cette conjecture est vraie : lorsque a et b n'ont aucun facteur commun supérieur à 1 (on dit qu'ils sont *premiers entre eux*), le plus grand entier non représentable sous la forme $ax + by$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ vaut $ab - a - b$. C'est le cas à deux valeurs du problème des pièces de Frobenius.

SOURCES

J. L. Ramírez Alfonsín et M. Skałba — Primes in numerical semigroups, Comptes Rendus Mathématique 358 (2020), publié en 2021. Lien direct