Première · spécialité maths · DM

# DM n°01 — Une cible, plusieurs stratégies

CHAPITRES

Calcul algébrique · Géométrie repérée et vecteurs · Fonctions · Statistiques et probabilités · Algorithmique

> *Une même cible peut être abordée de plusieurs façons : par la géométrie pour comprendre où tombe un tir, par les fonctions pour optimiser un réglage, par les statistiques pour comparer des séries de tirs, puis par les probabilités pour étudier une stratégie aléatoire. Le but du problème est précisément de changer d'outil sans changer de situation.*

Dans un repère orthonormé d'origine $O$, une cible est formée de trois disques concentriques de rayons 1, 2 et 3. Un impact $M$ rapporte :

- 5 points si $OM \leqslant 1$ ;
- 3 points si $1 < OM \leqslant 2$ ;
- 1 point si $2 < OM \leqslant 3$ ;
- 0 point si $OM > 3$.

## I Lire la cible avec des coordonnées

**1** On considère les impacts $A(0,6;0,8)$, $B(1,2;1,6)$, $C(-2;2)$ et $D(3;1)$. Déterminer le score de chacun de ces quatre impacts.

**2** Soit $M(x;y)$ un impact et posons $s = x^2 + y^2$.

**(a)** Expliquer pourquoi il n'est pas nécessaire de calculer $OM$ à l'aide d'une racine carrée pour déterminer le score.

**(b)** Donner le score directement en fonction de la position de $s$ par rapport aux trois seuils $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$.

**3** Après un mauvais réglage, tous les impacts d'un tireur sont contraints d'appartenir à la droite

$$\mathcal{D} : y = x + 3.$$

On considère aussi la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = -x$.

**(a)** On note

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

deux vecteurs directeurs respectifs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Expliquer géométriquement pourquoi ces deux directions sont perpendiculaires. En déduire que $\mathcal{D}'$ est la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $O$.

Indice : que devient le vecteur $\vec{u}$ après un quart de tour ?

**(b)** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H$ de $O$ sur $\mathcal{D}$.

**(c)** Calculer $OH$ et déterminer le meilleur score que ce tireur puisse obtenir tant que ce réglage n'est pas corrigé.

## II Un réglage à un paramètre

On considère maintenant deux points $P(-2;0)$ et $Q(2;2)$. Pour $t \in [0;1]$, on définit le point $M_t$ par

$$\overrightarrow{PM_t} = t\,\overrightarrow{PQ}.$$

Le paramètre $t$ représente un réglage continu entre deux positions extrêmes.

**4** Exprimer les coordonnées de $M_t$ en fonction de $t$.

**5** Montrer que

$$OM_t^2 = 20t^2 - 16t + 4 = 20\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

En déduire la valeur de $t$ qui rapproche le plus l'impact du centre et la distance minimale obtenue.

**6** Déterminer exactement les valeurs de $t$ pour lesquelles :

- **(a)** le tir marque $5$ points ;
- **(b)** le tir marque au moins $3$ points.

Montrer enfin qu'aucune valeur de $t \in [0;1]$ ne conduit à un tir manqué.

## III Deux séries de tirs : moyenne ou régularité ?

Deux stratégies A et B sont testées sur $20$ tirs chacune. On ne conserve que les scores :

- score $0$ : A $2$ tirs, B $1$ tir ;
- score $1$ : A $6$ tirs, B $10$ tirs ;
- score $3$ : A $8$ tirs, B $2$ tirs ;
- score $5$ : A $4$ tirs, B $7$ tirs.

**7** Pour chacune des deux séries, calculer :

- **(a)** la moyenne ;
- **(b)** la médiane, le premier quartile $Q_1$ et le troisième quartile $Q_3$ ;
- **(c)** l'écart type, arrondi au centième.

**8** Comparer les deux stratégies selon les trois critères suivants :

- **(a)** score moyen ;
- **(b)** fréquence des tirs marquant au moins $3$ points ;
- **(c)** régularité des résultats.

Expliquer pourquoi l'expression « meilleure stratégie » n'a pas de sens tant qu'on n'a pas choisi le critère que l'on souhaite privilégier.

## IV Une stratégie entièrement aléatoire

Un programme choisit maintenant au hasard et avec équiprobabilité un point $(x;y)$ de la grille

$$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}^2.$$

Il y a donc $49$ positions possibles.

**9** En classant les points suivant la valeur de $x^2+y^2$, montrer que le nombre de positions donnant respectivement $5$, $3$, $1$ et $0$ point vaut

$$5,\ 8,\ 16,\ 20.$$

**10** En déduire, pour un tir :

**(a)** la probabilité de marquer $5$ points ;

**(b)** la probabilité de marquer au moins $3$ points ;

**(c)** la probabilité de manquer la cible.

**11** Deux tirs sont produits indépendamment par le programme précédent. Calculer :

**(a)** la probabilité que les deux tirs marquent au moins $3$ points ;

**(b)** la probabilité qu'au moins l'un des deux tirs manque la cible.

**12** On remplace la grille précédente par la grille plus concentrée

$$\{-2,-1,0,1,2\}^2.$$

Comparer, pour cette nouvelle stratégie, la probabilité de marquer $5$ points et celle de marquer au moins $3$ points avec les probabilités obtenues précédemment.

## V Du modèle au programme

On souhaite simuler la première stratégie aléatoire. Voici un programme incomplet.

```
from random import randint

def score():
   x = randint(-3,3)
   y = randint(-3,3)
   s = x*x + y*y
   if s <= 1:
      return 5
   elif ........:
      return 3
   elif ........:
      return 1
   return 0

def frequence(N):
   succes = 0
   for k in range(N):
      if score() >= 3:
         succes = succes + 1
   return succes/N
```

**13** Compléter les deux conditions manquantes de la fonction `score`.

**14** Quelle valeur la fonction `frequence(N)` doit-elle généralement approcher lorsque $N$ devient très grand ? Pourquoi n'obtient-on pas exactement cette valeur à chaque exécution ?

La géométrie a permis d'analyser les impacts un par un, les fonctions d'optimiser un réglage, les statistiques de comparer ce qui a réellement été observé, et les probabilités d'étudier ce que produirait un modèle aléatoire. Ces quatre points de vue ne répondent pas aux mêmes questions : une partie importante du travail mathématique consiste justement à choisir celui qui est adapté au problème posé.