CORRIGÉ

Première · spécialité maths · CORRIGÉ

DM n°01 — Une cible, plusieurs stratégies

CHAPITRES

Calcul algébrique · Géométrie repérée et vecteurs · Fonctions · Statistiques et probabilités · Algorithmique

Le corrigé reprend les cinq points de vue du sujet : géométrie repérée, optimisation sans dérivation, statistiques descriptives, probabilités finies puis simulation.

I Lire la cible avec des coordonnées

1

Dans un repère orthonormé, $OM^2 = x^2 + y^2$. Ainsi

$$OA^2 = 0,6^2 + 0,8^2 = 1,$$

donc A marque 5 points ;

$$OB^2 = 1,2^2 + 1,6^2 = 4,$$

donc B marque 3 points ;

$$OC^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8,$$

donc $2 < OC < 3$ et C marque 1 point ; enfin

$$OD^2 = 3^2 + 1^2 = 10 > 9,$$

donc D est hors de la cible et marque 0 point.

2

(a) Les distances sont positives, et la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi comparer OM à 1, 2 et 3 revient exactement à comparer $OM^2 = x^2 + y^2$ à 1, 4 et 9.

(b) Avec $s = x^2 + y^2$:

- si $s \leqslant 1$, le score est 5 ;
- si $1 < s \leqslant 4$, le score est 3 ;
- si $4 < s \leqslant 9$, le score est 1 ;
- si $s > 9$, le score est 0.

IDÉE Comparer des carrés plutôt que des distances évite un calcul de racine carrée. La même idée est utile dans de nombreux algorithmes de géométrie.

3

(a) On note

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Un quart de tour dans le sens direct transforme $\vec{u}$ en

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{v}.$$

La direction obtenue est donc celle de $\vec{v}$: les deux droites sont perpendiculaires. Comme $\mathcal{D}'$ a pour équation $y = -x$, elle passe par O ; c'est bien la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par O.

(b) Le point H est l'intersection de $y = x + 3$ et $y = -x$. Ainsi

$$-x = x + 3,$$

d'où

$$H\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

(c) Le projeté orthogonal est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de O. Or

$$OH^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}, \qquad OH = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Comme $2 < 3/\sqrt{2} < 3$, aucun impact de $\mathcal{D}$ ne peut atteindre les deux zones centrales. En revanche H est dans la zone à 1 point. Le meilleur score possible est donc 1 point.

II Un réglage à un paramètre

4

On a

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{PM_t} = t\overrightarrow{PQ}$,

$$M_t = P + t\overrightarrow{PQ},$$

d'où

$$M_t(-2 + 4t; 2t).$$

5

On calcule

$$OM_t^2 = (-2 + 4t)^2 + (2t)^2 = 20t^2 - 16t + 4.$$

Puis

$$20t^2 - 16t + 4 = 20\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

Le carré est minimal lorsqu'il vaut 0, c'est-à-dire pour $t = 2/5$. La distance minimale vaut donc

$$OM_{2/5} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89.$$

6

(a) Le score vaut 5 si et seulement si $OM_t \leqslant 1$, soit

$$20\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \leqslant 1.$$

Ainsi

$$\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 \leqslant \frac{1}{100},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{3}{10} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}.$$

(b) Marquer au moins 3 points équivaut à $OM_t \leqslant 2$, donc

$$20\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \leqslant 4.$$

Il vient

$$\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 \leqslant \frac{4}{25},$$

puis, comme $t \in [0; 1]$,

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{4}{5}.$$

Enfin, pour $t \in [0; 1]$,

$$-\frac{2}{5} \leqslant t - \frac{2}{5} \leqslant \frac{3}{5},$$

donc

$$OM_t^2 \leqslant 20 \times \frac{9}{25} + \frac{4}{5} = 8 < 9.$$

Tous les réglages du segment restent donc dans la cible.

III Deux séries de tirs : moyenne ou régularité ?

7

Pour A,

$$\overline{x}_A = \frac{2\times 0 + 6\times 1 + 8\times 3 + 4\times 5}{20} = 2,5.$$

La série ordonnée contient deux 0, six 1, huit 3 et quatre 5. Avec la convention française usuelle du lycée,

$$\text{Med}_A = 3, \qquad Q_{1,A} = 1, \qquad Q_{3,A} = 3.$$

À la calculatrice,

$$\sigma_A \approx 1,63.$$

Pour B,

$$\overline{x}_B = \frac{1\times 0 + 10\times 1 + 2\times 3 + 7\times 5}{20} = 2,55.$$

La série ordonnée contient un 0, dix 1, deux 3 et sept 5. Donc

$$\text{Med}_B = 1, \qquad Q_{1,B} = 1, \qquad Q_{3,B} = 5,$$

et

$$\sigma_B \approx 1,91.$$

8

(a) La stratégie B a la moyenne la plus élevée : $2,55$ contre $2,50$.

(b) Avec A, 12 tirs sur 20 marquent au moins 3 points, soit 60%. Avec B, il y en a 9 sur 20, soit 45%. La stratégie A est donc meilleure selon ce critère.

(c) Les résultats de A sont plus concentrés : son écart type est plus faible et son écart interquartile vaut $3-1=2$, contre $5-1=4$ pour B.

La stratégie B obtient davantage de tirs à 5 points, ce qui suffit à relever légèrement sa moyenne, mais elle produit également beaucoup de tirs à 1 point. Il n'existe donc pas de classement absolu sans préciser ce que l'on cherche : moyenne élevée, fréquence de bons tirs ou régularité.

IV Une stratégie entièrement aléatoire

9

On classe les couples (x, y) selon $x^2 + y^2$.

Pour $x^2 + y^2 \leqslant 1$, on a $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, soit 5 points.

Pour $1 < x^2 + y^2 \leqslant 4$, on ajoute les quatre points $(\pm 1, \pm 1)$ et les quatre points $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$, soit 8 points.

Pour $4 < x^2 + y^2 \leqslant 9$, on obtient :

- $(\pm 1, \pm 2)$ et $(\pm 2, \pm 1)$: 8 points ;
- $(\pm 2, \pm 2)$: 4 points ;
- $(\pm 3, 0)$ et $(0, \pm 3)$: 4 points.

Cela fait 16 points. Il reste

$$49 - (5 + 8 + 16) = 20$$

points hors de la cible. Les quatre effectifs sont bien 5, 8, 16, 20.

10

L'univers comporte 49 issues équiprobables. Ainsi

$$\mathbb{P}(5 \text{ points}) = \frac{5}{49},$$
$$\mathbb{P}(\text{au moins 3 points}) = \frac{5+8}{49} = \frac{13}{49},$$

et

$$\mathbb{P}(\text{manquer}) = \frac{20}{49}.$$

11

Les deux tirs étant indépendants,

$$\mathbb{P}(\text{deux tirs à au moins 3}) = \left(\frac{13}{49}\right)^2 = \frac{169}{2401}.$$

Un tir atteint la cible avec probabilité $29/49$. Par complément,

$$\mathbb{P}(\text{au moins un manque}) = 1 - \left(\frac{29}{49}\right)^2 = \frac{1560}{2401} \approx 0,650.$$

12

Sur la grille $\{-2, -1, 0, 1, 2\}^2$, il y a 25 positions. Les 5 positions de la zone centrale et les 8 positions de la deuxième zone sont inchangées. Les 12 autres positions sont encore dans le disque de rayon 3.

Ainsi

$$\mathbb{P}(5 \text{ points}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}(\text{au moins 3 points}) = \frac{13}{25}.$$

Ces deux probabilités sont supérieures respectivement à $5/49$ et $13/49$. La stratégie est plus concentrée autour du centre.

V Du modèle au programme

13

Il faut écrire :

```
elif s <= 4:
   return 3
elif s <= 9:
   return 1
```

14

La fonction compte la proportion de tirs qui marquent au moins 3 points. Le modèle théorique donne

$$\frac{13}{49} \approx 0,2653.$$

Pour un grand nombre de simulations, la fréquence observée doit généralement être proche de cette valeur. Elle n'est pas exactement égale à $13/49$ à chaque exécution, car les résultats simulés sont aléatoires : la fréquence fluctue d'un échantillon à l'autre.

Ce problème illustre une distinction utile : une observation statistique décrit ce qui s'est produit, tandis qu'un modèle probabiliste décrit ce qui pourrait se produire sous des hypothèses données. La géométrie et les fonctions, elles, permettent d'agir sur la stratégie elle-même avant même de tirer.

SOURCES

NRICH — Dart Target. Lien direct