MP · MPI · DM

DM n°01 — Le calcul différentiel discret

CHAPITRES

Polynômes · Algèbre linéaire · Coefficients binomiaux · Suites et sommes finies

> *Sur une droite continue, la dérivée mesure une variation infinitésimale. Sur la grille des entiers, une autre comparaison s'impose naturellement : regarder ce qui change lorsqu'on avance exactement d'un pas. Ce devoir construit l'algèbre de cette opération, puis l'utilise pour reconstruire des polynômes et calculer des sommes finies.*

Dans tout le problème, on travaille dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout polynôme P, on définit sa **différence finie en avant de pas** 1 par

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et, pour $k \geqslant 1$,

$$\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}.$$

I Un opérateur qui abaisse le degré

1 Calculer ΔP lorsque P vaut successivement 1, X, X^2 puis X^3. Comparer brièvement avec la dérivation usuelle.

2 Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Si P est non constant, de degré d et de coefficient dominant a_d, déterminer le degré et le coefficient dominant de ΔP. En déduire $\ker \Delta$.

3 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel est dit **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $u^r = 0$; le plus petit tel entier est appelé son **indice de nilpotence**.

Montrer que Δ induit un endomorphisme de E_n, puis déterminer son indice de nilpotence. Plus généralement, déterminer, pour $0 \leqslant k \leqslant n+1$, les espaces

$$\ker(\Delta^k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\Delta^k)$$

sur E_n. On adoptera la convention $E_{-1} = \{0\}$.

Si le coefficient de X^n dans $P \in E_n$ est a_n, déterminer en particulier $\Delta^n P$.

Dans la base usuelle $(1, X, \dots, X^n)$, les expressions de ΔP se chargent vite. On va chercher une base dans laquelle l'action de Δ devient aussi simple que possible.

II Une base adaptée aux différences finies

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$B_0(X) = 1,$$

et, pour $k \geqslant 1$,

$$B_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

On pourra aussi noter $B_k(X) = \binom{X}{k}$. Pour X réel, cette écriture désigne un polynôme. Lorsque $m \in \mathbb{N}$, sa valeur $B_k(m)$ est le coefficient binomial usuel $\binom{m}{k}$; elle vaut en particulier 0 si $k > m$.

4 Montrer que $(B_0, \dots, B_n)$ est une base de E_n et déterminer ΔB_k pour tout k. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geqslant 1$,

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}.$$

5 Écrire la matrice de Δ dans la base $(B_0, \dots, B_n)$. La comparer à la matrice de la dérivation dans la base

$$\left(1, X, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^n}{n!}\right).$$

Expliquer en quoi cette comparaison éclaire les résultats de la question 3.

Cette base transforme donc la différence finie en un simple décalage d'indice. Elle permet maintenant de reconstruire un polynôme à partir de ses valeurs sur une grille.

III Reconstruire un polynôme sur une grille

6 On étend dans cette question la notation Δ à toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Calculer $\Delta^2 f(x)$ et $\Delta^3 f(x)$. À partir des coefficients observés, conjecturer puis démontrer une formule générale exprimant $\Delta^k f(x)$ à l'aide de

$$f(x), f(x+1), \dots, f(x+k).$$

La formule devra inclure le cas $k = 0$.

7 Soit $P \in E_n$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(B_0, \dots, B_n)$ à l'aide des nombres

$$P(0), \quad \Delta P(0), \quad \dots, \quad \Delta^n P(0).$$

En déduire une formule de reconstruction de P, puis montrer que les seules valeurs

$$P(0), P(1), \dots, P(n)$$

déterminent déjà entièrement P.

8 On sait qu'un polynôme P est de degré au plus 3 et que

$$P(0) = 2, \qquad P(1) = 3, \qquad P(2) = 8, \qquad P(3) = 23.$$

Déterminer P d'abord dans la base (B_0, B_1, B_2, B_3), puis sous forme développée.

L'opération Δ peut aussi être inversée sur les polynômes. Cette inversion transforme les sommes finies en différences de valeurs aux extrémités.

IV Inverser Δ et sommer

On appelle **primitive discrète** d'un polynôme P tout polynôme Q tel que

$$\Delta Q = P.$$

9 Décrire toutes les primitives discrètes d'un polynôme P. Si P est non nul, relier le degré et le coefficient dominant de ses primitives à ceux de P.

Puis, pour des entiers $a < b$, exprimer

$$\sum_{m=a}^{b-1} P(m)$$

à l'aide d'une primitive discrète de P.

10 Pour $k, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{m=0}^{n-1} B_k(m).$$

En utilisant la base (B_k), en déduire les trois identités

$$\sum_{m=0}^{n-1} m, \qquad \sum_{m=0}^{n-1} m^2, \qquad \sum_{m=0}^{n-1} m^3.$$

11 Soit P un polynôme non nul de degré d et de coefficient dominant a. Montrer que la fonction

$$n \longmapsto \sum_{m=0}^{n-1} P(m), \qquad n \in \mathbb{N},$$

coïncide sur $\mathbb{N}$ avec un polynôme. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

V Quand les différences finissent par s'annuler

Pour une suite réelle $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$, on définit

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n,$$

puis les différences itérées de la même manière.

12 Soit $d \in \mathbb{N}$. Démontrer l'équivalence

$$\Delta^{d+1} u = 0 \quad \iff \quad \exists P \in \mathbb{R}_d[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P(n).$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, déterminer explicitement l'unique polynôme P à partir des différences initiales

$$u_0, \quad (\Delta u)_0, \quad \ldots, \quad (\Delta^d u)_0.$$

Le même opérateur relie ainsi plusieurs phénomènes : il abaisse le degré, devient un décalage dans une base adaptée, reconstruit un polynôme à partir de valeurs équidistantes et transforme les sommes finies en télescopages. L'annulation d'une différence itérée caractérise finalement les suites données par un polynôme.