L3 · DM

DM n°01 — Une dimension fractale détecte l'infinité des nombres premiers

CHAPITRES

Dimension supérieure de boîte · Recouvrements · Produits d'ensembles · Nombres premiers

> *Un ensemble peut être infini et pourtant extrêmement mince. Pour rendre cette intuition mesurable, on va construire une notion de taille qui observe un ensemble à des échelles de plus en plus fines. Cette géométrie conduira ensuite à une question inattendue : la factorisation des entiers impose-t-elle une forme particulière à l'ensemble de leurs inverses ?*

Dans tout le problème, les ensembles considérés sont des sous-ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $N_\varepsilon(A)$ le nombre minimal d'intervalles fermés de longueur ε nécessaires pour recouvrir A.

I Mesurer un ensemble à l'échelle ε

1 **(a)** Soit $F \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini contenant m points. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$1 \leq N_\varepsilon(F) \leq m.$$

(b) Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, montrer que

$$N_\varepsilon([0,1]) \leq \varepsilon^{-1} + 2.$$

(c) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$, indépendante de ε, telle que

$$N_\varepsilon([0,1]) \geq \frac{c}{\varepsilon}$$

pour tout ε assez petit.

Les deux exemples précédents suggèrent de mesurer non pas le nombre $N_\varepsilon(A)$ lui-même, mais la puissance de $1/\varepsilon$ qui décrit sa croissance. On définit la **dimension supérieure de boîte** de A par

$$\overline{\dim}_B(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}.$$

2 **(a)** Montrer que tout ensemble fini non vide a une dimension supérieure de boîte nulle et que

$$\overline{\dim}_B([0,1]) = 1.$$

(b) Montrer que tout ensemble borné non vide $A \subset \mathbb{R}$ vérifie

$$0 \leq \overline{\dim}_B(A) \leq 1.$$

(c) Soit $c > 0$ fixé. Montrer que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N_{c\varepsilon}(A)}{-\log \varepsilon} = \overline{\dim}_B(A).$$

Interpréter brièvement ce résultat.

II Une infinité de points peut avoir une dimension nulle

Pour $q > 1$, on considère

$$G_q = \{1, q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, \ldots\}.$$

3 **(a)** Établir, pour ε assez petit,

$$N_\varepsilon(G_q) \leq 2 + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log q}.$$

(b) Montrer que

$$\overline{\dim}_B(G_q) = 0.$$

IDÉE L'ensemble G_q est infini, mais ses points se concentrent si vite près de 0 que le nombre d'intervalles nécessaires ne croît que logarithmiquement. La dimension de boîte distingue donc la cardinalité d'un ensemble de la vitesse à laquelle ses points s'accumulent à petite échelle.

III Multiplier des ensembles sans faire exploser leur dimension

Pour deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}$, on définit leur produit par

$$AB = \{ab\,;\ a \in A,\ b \in B\}.$$

4 **(a)** Soient A et B bornés et $R \geq 1$ tel que $A \cup B \subset [-R, R]$. Pour $\varepsilon > 0$, poser $\eta = \varepsilon/(2R)$. Montrer que, si $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$ vérifient

$$|a - a'| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad |b - b'| \leq \eta,$$

alors

$$|ab - a'b'| \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer que

$$N_\varepsilon(AB) \leq N_{\varepsilon/(2R)}(A)\, N_{\varepsilon/(2R)}(B).$$

5 **(a)** Montrer que

$$\overline{\dim}_B(AB) \leq \overline{\dim}_B(A) + \overline{\dim}_B(B).$$

(b) Montrer que, pour des ensembles bornés $A_1, \ldots, A_r$,

$$\overline{\dim}_B(A_1 A_2 \cdots A_r) \leq \sum_{i=1}^{r} \overline{\dim}_B(A_i).$$

(c) Déterminer la dimension supérieure de boîte d'un produit fini d'ensembles ayant chacun une dimension supérieure de boîte nulle.

IV Ce que prédirait un nombre fini de nombres premiers

On pose désormais

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \,;\, n \geq 1 \right\} \qquad \text{et, pour tout nombre premier } p, \qquad A_p = \{1, p^{-1}, p^{-2}, \ldots\}.$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. L'unicité d'une telle écriture n'est pas supposée.

6 **(a)** Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$. Montrer que

$$E = A_{p_1} A_{p_2} \cdots A_{p_r}.$$

(b) Montrer que cette hypothèse imposerait

$$\overline{\dim}_B(E) = 0.$$

IDÉE La factorisation des entiers vient de se transformer en une factorisation géométrique de l'ensemble E. Sous l'hypothèse de finititude des nombres premiers, cette factorisation prédit que E doit être extrêmement mince. Il reste à mesurer directement E.

V La géométrie réelle de $E = \{1/n\}$

7 **(a)** Pour $m \geq 2$, poser

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m(m+1)}.$$

Montrer qu'un intervalle de longueur ε_m ne peut contenir deux points distincts de

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m} \right\}.$$

(b) Montrer que

$$N_{\varepsilon_m}(E) \geq m \qquad \text{et} \qquad \overline{\dim}_B(E) \geq \frac{1}{2}.$$

IDÉE Cette minoration suffit déjà à obtenir la contradiction finale. Dans son article, Kota Saito rappelle la valeur exacte $\overline{\dim}_B(E) = 1/2$, mais ne redémontre que la minoration nécessaire à sa preuve. Nous allons ici établir aussi la majoration afin de déterminer exactement la dimension de E.

8 **(a)** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$N_\varepsilon(E) \leq C\varepsilon^{-1/2}.$$

(b) Déterminer la valeur exacte de $\overline{\dim}_B(E)$.

9 **(a)** Conclure qu'il existe une infinité de nombres premiers.

(b) La preuve utilise-t-elle l'unicité de la décomposition en facteurs premiers ? Justifier précisément.

Prolongement facultatif - indépendant de la preuve principale

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$E_\alpha = \{n^{-\alpha}\,;\, n \geq 1\}.$$

Ce prolongement n'est pas nécessaire à la démonstration précédente ; il étudie la même question géométrique pour une famille plus générale de suites.

10 **(a)** À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\alpha(n+1)^{-\alpha-1} \leq n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha} \leq \alpha n^{-\alpha-1}.$$

(b) Établir

$$\overline{\dim}_B(E_\alpha) \geq \frac{1}{\alpha+1}.$$

(c) Déterminer $\overline{\dim}_B(E_\alpha)$.