CORRIGÉ

L3 · CORRIGÉ

DM n°01 — Une dimension fractale détecte l'infinité des nombres premiers

CHAPITRES

Dimension supérieure de boîte · Recouvrements · Produits d'ensembles · Nombres premiers

I Mesurer un ensemble à l'échelle ε

1

(a) Si $F = \{x_1, \dots, x_m\}$, chaque point peut être recouvert par un intervalle de longueur ε. On obtient donc $N_\varepsilon(F) \leq m$. Comme F est non vide, tout recouvrement utilise au moins un intervalle, donc $N_\varepsilon(F) \geq 1$. Ainsi

$$1 \leq N_\varepsilon(F) \leq m.$$

(b) On peut recouvrir $[0,1]$ par les intervalles

$$[0, \varepsilon],\ [\varepsilon, 2\varepsilon], \dots$$

jusqu'à dépasser 1. Il suffit de $\lceil 1/\varepsilon \rceil$ intervalles ; en particulier

$$N_\varepsilon([0,1]) \leq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \leq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \leq \frac{1}{\varepsilon} + 2.$$

(c) Considérons les points

$$0,\ 2\varepsilon,\ 4\varepsilon, \dots,\ 2k\varepsilon$$

qui appartiennent à $[0,1]$, avec $k = \lfloor 1/(2\varepsilon) \rfloor$. Deux de ces points sont à distance au moins $2\varepsilon > \varepsilon$; un intervalle de longueur ε ne peut donc en contenir deux. Il faut au moins $k+1$ intervalles. Pour $0 < \varepsilon \leq 1/2$,

$$k + 1 > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

On peut donc prendre $c = 1/2$:

$$N_\varepsilon([0,1]) \geq \frac{1}{2\varepsilon}.$$

2

(a) Pour un ensemble fini non vide F de cardinal m, les estimations précédentes donnent

$$0 \leq \frac{\log N_\varepsilon(F)}{-\log \varepsilon} \leq \frac{\log m}{-\log \varepsilon}.$$

Le membre de droite tend vers 0, donc

$$\boxed{\overline{\dim}_B(F) = 0.}$$

Pour $[0,1]$, les estimations précédentes donnent, pour ε assez petit,

$$\frac{\log(1/(2\varepsilon))}{-\log\varepsilon} \leq \frac{\log N_\varepsilon([0,1])}{-\log\varepsilon} \leq \frac{\log(1/\varepsilon+2)}{-\log\varepsilon}.$$

Les deux termes extrêmes tendent vers 1. Par encadrement,

$$\boxed{\overline{\dim}_B([0,1]) = 1.}$$

(b) La minoration est immédiate : $N_\varepsilon(A) \geq 1$, donc le quotient qui définit la dimension est positif ou nul. Pour la majoration, comme A est borné, il existe un intervalle $[-M, M]$ qui le contient. On peut recouvrir cet intervalle par au plus

$$\frac{2M}{\varepsilon} + 2$$

intervalles de longueur ε. Ainsi

$$N_\varepsilon(A) \leq \frac{2M}{\varepsilon} + 2.$$

En prenant les logarithmes et le lim sup,

$$\overline{\dim}_B(A) \leq 1.$$

Donc

$$\boxed{0 \leq \overline{\dim}_B(A) \leq 1.}$$

(c) Posons $\delta = c\varepsilon$. Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on a aussi $\delta \to 0^+$, et

$$\frac{\log N_{c\varepsilon}(A)}{-\log\varepsilon} = \frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta} \cdot \frac{-\log\delta}{-\log\delta + \log c}.$$

Le second facteur tend vers 1. Le premier est borné supérieurement à long terme grâce à la majoration $\overline{\dim}_B(A) \leq 1$ établie ci-dessus. Par conséquent, multiplier par le second facteur ne change pas le lim sup :

$$\boxed{\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log N_{c\varepsilon}(A)}{-\log\varepsilon} = \overline{\dim}_B(A).}$$

La dimension ignore donc les changements d'échelle par un facteur multiplicatif constant.

IDÉE Cette stabilité est le petit lemme technique qui permettra plus loin de remplacer ε par $\varepsilon/(2R)$ sans modifier l'exposant asymptotique.

II Une infinité de points peut avoir une dimension nulle

3

(a) Posons

$$k = \left\lceil \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log q} \right\rceil.$$

Alors $q^{-k} \leq \varepsilon$. Les termes $1, q^{-1}, \dots, q^{-(k-1)}$ peuvent être recouverts séparément, tandis que toute la queue

$$\{q^{-k}, q^{-(k+1)}, \dots\}$$

est contenue dans $[0, \varepsilon]$. Ainsi

$$N_\varepsilon(G_q) \leq k + 1 \leq 2 + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log q}.$$

(b) On obtient

$$0 \leq \overline{\dim}_B(G_q) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log\left(2 + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log q}\right)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Le numérateur est de l'ordre de $\log\log(1/\varepsilon)$ et le dénominateur de l'ordre de $\log(1/\varepsilon)$; leur quotient tend vers 0. Donc

$$\boxed{\overline{\dim}_B(G_q) = 0.}$$

IDÉE La différence essentielle est une différence de vitesse : pour une suite géométrique, atteindre l'échelle ε ne demande qu'un nombre de termes proportionnel à $\log(1/\varepsilon)$.

III Multiplier des ensembles sans faire exploser leur dimension

4

(a) Comme A et B sont bornés, on choisit $R \geq 1$ tel que $|x| \leq R$ pour tout $x \in A \cup B$. Posons $\eta = \varepsilon/(2R)$. Pour $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$ vérifiant $|a - a'| \leq \eta$ et $|b - b'| \leq \eta$, on écrit

$$ab - a'b' = a(b - b') + b'(a - a').$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |ab - a'b'| &\leq |a|\,|b - b'| + |b'|\,|a - a'| \\ &\leq R\eta + R\eta \\ &= 2R\frac{\varepsilon}{2R} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Prenons un recouvrement de A par $N_\eta(A)$ intervalles I_i de longueur η, et un recouvrement de B par $N_\eta(B)$ intervalles J_j de longueur η. L'estimation précédente montre que le diamètre de

$$(A \cap I_i)(B \cap J_j)$$

est au plus ε. Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de diamètre au plus ε est contenu dans un intervalle de longueur ε. Les ensembles précédents, lorsque i et j varient, recouvrent AB : si $ab \in AB$, alors a appartient à un certain I_i et b à un certain J_j. Il y a au plus

$$N_\eta(A) N_\eta(B)$$

paires (i,j). On obtient donc

$$\boxed{N_\varepsilon(AB) \le N_{\varepsilon/(2R)}(A) N_{\varepsilon/(2R)}(B).}$$

IDÉE On a ici formulé le recouvrement avec les intersections $A \cap I_i$ et $B \cap J_j$. Cela garantit que les facteurs utilisés sont effectivement bornés par R, ce qui rend l'estimation complètement explicite.

5

(a) En prenant les logarithmes dans l'inégalité de recouvrement obtenue ci-dessus,

$$\frac{\log N_\varepsilon(AB)}{-\log \varepsilon} \le \frac{\log N_{\varepsilon/(2R)}(A)}{-\log \varepsilon} + \frac{\log N_{\varepsilon/(2R)}(B)}{-\log \varepsilon}.$$

En prenant le lim sup et en utilisant

$$\limsup(x_\varepsilon + y_\varepsilon) \le \limsup x_\varepsilon + \limsup y_\varepsilon,$$

puis l'invariance par changement d'échelle constant avec $c = 1/(2R)$, on obtient

$$\boxed{\overline{\dim}_B(AB) \le \overline{\dim}_B(A) + \overline{\dim}_B(B).}$$

(b) Pour $r = 2$, l'inégalité vient d'être établie. Supposons le résultat vrai pour $r-1$ ensembles. Alors

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_B(A_1 \cdots A_r) &= \overline{\dim}_B\big((A_1 \cdots A_{r-1})A_r\big)\\ &\le \overline{\dim}_B(A_1 \cdots A_{r-1}) + \overline{\dim}_B(A_r)\\ &\le \sum_{i=1}^{r} \overline{\dim}_B(A_i).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\overline{\dim}_B(A_1 \cdots A_r) \le \sum_{i=1}^{r} \overline{\dim}_B(A_i).}$$

(c) Si chaque A_i a dimension supérieure de boîte nulle, alors la majoration précédente donne

$$0 \le \overline{\dim}_B(A_1 \cdots A_r) \le 0.$$

Donc

$$\boxed{\overline{\dim}_B(A_1 \cdots A_r) = 0.}$$

IV Ce que prédirait un nombre fini de nombres premiers

6

(a) Supposons que les seuls nombres premiers soient $p_1, \dots, p_r$. Montrons d'abord

$$E \subset A_{p_1} \cdots A_{p_r}.$$

Soit $1/n \in E$. Si $n = 1$, on prend tous les exposants nuls. Si $n \geq 2$, l'existence d'une factorisation première donne des entiers $e_1, \dots, e_r \geq 0$ tels que

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}.$$

Alors

$$\frac{1}{n} = p_1^{-e_1} \cdots p_r^{-e_r},$$

et chaque facteur $p_i^{-e_i}$ appartient à A_{p_i}. Donc $1/n$ appartient au produit d'ensembles.

Réciproquement, soit

$$x \in A_{p_1} \cdots A_{p_r}.$$

Il existe $e_1, \dots, e_r \geq 0$ tels que

$$x = p_1^{-e_1} \cdots p_r^{-e_r} = \frac{1}{p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}}.$$

Le dénominateur est un entier strictement positif ; donc $x \in E$. Ainsi

$$\boxed{E = A_{p_1} \cdots A_{p_r}.}$$

(b) Chaque A_{p_i} est un ensemble G_q avec $q = p_i > 1$. D'après l'étude des suites géométriques,

$$\overline{\dim}_B(A_{p_i}) = 0.$$

La sous-additivité pour les produits finis donne alors

$$\boxed{\overline{\dim}_B(E) = 0}$$

sous l'hypothèse qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers.

IDÉE C'est le basculement central de la preuve : l'arithmétique ne fournit plus un entier auxiliaire comme chez Euclide ; elle impose une décomposition géométrique de tout l'ensemble des inverses des entiers.

V La géométrie réelle de $E = \{1/n\}$

7

(a) Pour $1 \leq n \leq m - 1$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ces écarts décroissent avec n ; le plus petit écart entre deux termes consécutifs de

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}$$

vaut donc

$$\frac{1}{(m-1)m}.$$

Or

$$\frac{1}{(m-1)m} > \frac{1}{m(m+1)} = \varepsilon_m.$$

Deux points distincts de la liste sont ainsi séparés par une distance strictement supérieure à ε_m. Un intervalle de longueur ε_m ne peut en contenir deux.

(b) Il faut donc au moins m intervalles pour recouvrir les m premiers points, et a fortiori pour recouvrir E :

$$N_{\varepsilon_m}(E) \geq m.$$

Comme $\varepsilon_m \to 0$,

$$\overline{\dim}_B(E) \geq \limsup_{m\to\infty} \frac{\log N_{\varepsilon_m}(E)}{-\log \varepsilon_m} \geq \lim_{m\to\infty} \frac{\log m}{\log m + \log(m+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\overline{\dim}_B(E) \geq \frac{1}{2}.}$$

IDÉE Cette seule minoration suffit à la preuve de l'infinité des nombres premiers. Saito rappelle dans son article la valeur exacte $\overline{\dim}_B(E) = 1/2$, mais son argument n'a besoin de redémontrer que cette minoration. La majoration suivante est un complément du présent DM.

8

(a) Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et posons

$$m = \left\lceil \varepsilon^{-1/2} \right\rceil.$$

On recouvre séparément les m premiers points de E. Les autres points appartiennent à

$$\left[0, \frac{1}{m+1}\right],$$

qui peut être recouvert par au plus

$$\left\lceil \frac{1}{(m+1)\varepsilon} \right\rceil$$

intervalles de longueur ε. Par conséquent

$$N_\varepsilon(E) \leq m + \left\lceil \frac{1}{(m+1)\varepsilon} \right\rceil.$$

Comme $m \leq \varepsilon^{-1/2} + 1$ et $(m+1)^{-1} \leq m^{-1} \leq \varepsilon^{1/2}$,

$$N_\varepsilon(E) \leq 2\varepsilon^{-1/2} + 2.$$

On peut donc prendre, par exemple, $C = 4$ pour tout ε assez petit.

(b) La majoration précédente donne

$$\overline{\dim}_B(E) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(C\varepsilon^{-1/2})}{-\log \varepsilon} = \frac{1}{2}.$$

Avec la minoration obtenue précédemment,

$$\boxed{\overline{\dim}_B(E) = \frac{1}{2}.}$$

9

(a) Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$. Pour chaque i, posons

$$A_{p_i} = \{1, p_i^{-1}, p_i^{-2}, \dots\}.$$

Chacun de ces ensembles a une dimension supérieure de boîte nulle, car son nombre de recouvrement croît au plus logarithmiquement lorsque l'échelle tend vers 0. L'existence d'une décomposition de tout entier en produit de nombres premiers donne

$$E = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} = A_{p_1} \cdots A_{p_r}.$$

La sous-additivité de la dimension supérieure de boîte pour les produits finis entraîne

$$\overline{\dim}_B(E) \leq \sum_{i=1}^{r} \overline{\dim}_B(A_{p_i}) = 0,$$

donc $\overline{\dim}_B(E) = 0$. Mais l'étude directe de E donne

$$\overline{\dim}_B(E) = \frac{1}{2}.$$

Contradiction. Ainsi

$$\boxed{\text{l'ensemble des nombres premiers est infini.}}$$

(b) Non. Pour obtenir l'inclusion

$$E \subset A_{p_1} \cdots A_{p_r},$$

il suffit que chaque entier positif possède au moins une factorisation en nombres premiers. Réciproquement, tout choix d'exposants $e_1, \dots, e_r \geq 0$ fournit l'inverse de l'entier $p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$. L'égalité des ensembles ne demande donc jamais que la factorisation soit unique.

IDÉE Le cœur de la preuve est un changement de langage : une hypothèse arithmétique sur les nombres premiers devient une contrainte géométrique sur l'ensemble des inverses des entiers. La mesure directe de cette géométrie rend la contrainte impossible.

Prolongement facultatif - indépendant de la preuve principale

10

(a) Soit $f(x) = x^{-\alpha}$ sur $(0, +\infty)$. On a

$$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n \in (n, n+1)$ tel que

$$n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha} = \alpha \xi_n^{-\alpha-1}.$$

La fonction $x \mapsto x^{-\alpha-1}$ étant décroissante,

$$(n+1)^{-\alpha-1} \leq \xi_n^{-\alpha-1} \leq n^{-\alpha-1}.$$

En multipliant par $\alpha > 0$,

$$\boxed{\alpha(n+1)^{-\alpha-1} \leq n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha} \leq \alpha n^{-\alpha-1}.}$$

(b) Parmi les m premiers points

$$1, 2^{-\alpha}, \ldots, m^{-\alpha},$$

le plus petit écart entre deux points consécutifs est au moins

$$\alpha m^{-\alpha-1}.$$

Posons par exemple

$$\varepsilon_m = \frac{\alpha}{2} m^{-\alpha-1}.$$

Alors un intervalle de longueur ε_m ne peut contenir deux de ces m points. Donc

$$N_{\varepsilon_m}(E_\alpha) \geq m.$$

Ainsi

$$\overline{\dim}_B(E_\alpha) \geq \lim_{m\to\infty} \frac{\log m}{-\log \varepsilon_m}.$$

Or

$$-\log \varepsilon_m = (\alpha+1)\log m - \log(\alpha/2),$$

donc

$$\boxed{\overline{\dim}_B(E_\alpha) \geq \frac{1}{\alpha+1}.}$$

(c) Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et

$$m = \left\lceil \varepsilon^{-1/(\alpha+1)} \right\rceil.$$

Les m premiers points sont recouverts par m intervalles. La queue est contenue dans

$$[0, (m+1)^{-\alpha}],$$

et nécessite au plus

$$\frac{m^{-\alpha}}{\varepsilon} + 1$$

intervalles. Comme $m \geq \varepsilon^{-1/(\alpha+1)}$,

$$\frac{m^{-\alpha}}{\varepsilon} \leq \varepsilon^{\alpha/(\alpha+1)}\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1/(\alpha+1)}.$$

De plus,

$$m \leq \varepsilon^{-1/(\alpha+1)} + 1.$$

Donc

$$N_\varepsilon(E_\alpha) \leq 2\varepsilon^{-1/(\alpha+1)} + 2.$$

En passant au lim sup,

$$\overline{\dim}_B(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha+1}.$$

Avec la minoration précédente,

$$\boxed{\overline{\dim}_B(E_\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}.}$$

IDÉE Ce prolongement montre que la valeur $1/2$ n'est pas accidentelle : elle correspond au cas $\alpha = 1$ de la loi générale $\overline{\dim}_B\{n^{-\alpha}\} = 1/(\alpha+1)$. Cette généralisation n'intervient cependant pas dans la preuve de l'infinité des nombres premiers.

SOURCES

Kota Saito — A Fractal Proof of the Infinitude of Primes. Lien direct

Kota Saito — A Fractal Proof of the Infinitude of Primes, version auteur. Lien direct