Reprendre les maths · PARCOURS GUIDÉ

AU PROGRAMME

Raisonnement logique · Parité · Calcul littéral

Parcours n°03 — Qu'est-ce qu'un raisonnement correct ?

> *Une conclusion peut sembler évidente, familière ou au contraire étrange : cela ne suffit pas à dire si le raisonnement qui y conduit est correct. Nous partirons de petites histoires, puis nous reviendrons à une question sur les nombres entiers. Le but sera de comprendre précisément ce qu'une affirmation permet de conclure — et ce qu'elle ne permet pas de conclure.*

Pour vous lancer

Aucun cours de logique n'est nécessaire. Nous rappellerons au moment utile ce qu'est un nombre pair ou impair. Nous utiliserons aussi quelques manipulations de calcul littéral — c'est-à-dire du calcul avec des lettres — pour mettre au carré des expressions comme $2k$ ou $2k+1$; les formules utiles seront rappelées lorsqu'elles seront nécessaires. L'objectif est surtout de distinguer une observation, une démonstration et une conclusion qui va réellement dans le bon sens.

Au départ, trois personnes examinent l'affirmation suivante :

(A) « Si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair. »

Nora a essayé beaucoup de nombres : chaque fois que le carré était pair, le nombre de départ l'était aussi. Elle estime que l'affirmation est démontrée.

Sam répond : « Si le nombre est pair, je peux l'écrire comme deux fois un entier. Son carré sera donc encore pair. J'ai donc démontré l'affirmation. »

Lina propose : « Je regarderais plutôt ce qui se passe quand le nombre de départ est impair. »

Première impression. Nora vous convainc-elle ? Sam a-t-il démontré exactement (A) ? La piste de Lina vous paraît-elle utile ? Notez en quelques mots vos réponses et vos raisons : vous les reprendrez à la fin.

I Deux histoires, une même façon de raisonner

Dans un bâtiment, on sait seulement que la règle suivante est vraie :

Toute personne qui possède un badge Or peut entrer dans la salle Atlas.

1 À partir de cette seule règle, dire pour chaque situation ce que l'on peut réellement conclure.

(a) Alice possède un badge Or. Peut-on conclure qu'elle peut entrer dans la salle Atlas ?

(b) Bilal peut entrer dans la salle Atlas. Peut-on conclure qu'il possède un badge Or ?

(c) Chloé ne possède pas de badge Or. Peut-on conclure qu'elle ne peut pas entrer dans la salle Atlas ?

(d) David ne peut pas entrer dans la salle Atlas. Peut-on conclure qu'il ne possède pas de badge Or ?

Considérons maintenant un café imaginaire où une règle un peu étrange est toujours respectée :

Toute tasse qui chante possède une anse rouge.

2 Même question dans ce nouveau contexte.

(a) La tasse de Léa chante. Que peut-on conclure ?

(b) La tasse de Nino possède une anse rouge. Peut-on conclure qu'elle chante ?

(c) La tasse de Maya ne chante pas. Peut-on conclure que son anse n'est pas rouge ?

(d) La tasse de Sami n'a pas d'anse rouge. Peut-on conclure qu'elle ne chante pas ?

3 Les deux situations semblent très différentes. Expliquer pourtant pourquoi les réponses suivent le même schéma. Distinguer en particulier une règle « si A, alors B » de sa **réciproque** « si B, alors A ».

II Sam a-t-il démontré la bonne chose ?

Revenons aux nombres entiers : $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Un entier est **pair** lorsqu'il est un multiple de 2. Pour se le représenter, un entier positif pair se regroupe par paquets de deux sans reste : par exemple, $8 = 2 \times 4$. Avec une lettre, cela s'écrit $n = 2k$, où k est un entier.

Un entier est **impair** lorsqu'il n'est pas pair. Pour un entier positif, il reste alors une unité après avoir formé les paquets de deux : par exemple, $9 = 2 \times 4 + 1$. Avec une lettre, cela s'écrit $n = 2k + 1$. Pour un entier, il n'y a pas de troisième possibilité : il est pair ou impair.

4 **(a)** Démontrer que si un entier n est pair, alors son carré n^2 est pair. **Rappel :** si $n = 2k$, on peut utiliser $(2k)^2 = 4k^2$, puis reconnaître dans le résultat la forme d'un nombre pair.

(b) Comparer exactement cette phrase avec (A). Laquelle est la réciproque de l'autre ? Pourquoi le calcul correct de Sam ne suffit-il pas encore à démontrer (A) ?

5 **(a)** Expliquer pourquoi mille exemples qui vont dans le sens de (A) ne constituent pas encore une démonstration.

(b) Décrire au contraire un seul type d'exemple qui suffirait à montrer que (A) est fausse. Un tel exemple s'appelle un **contre-exemple**.

III Lina regarde la question de l'autre côté

6 Démontrer que si un entier n est impair, alors son carré n^2 est impair. **Rappel :** partir de $n = 2k + 1$ et utiliser $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, puis reconnaître la forme d'un nombre impair.

7 Comparer les deux phrases :

« Si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair. »

« Si un entier est impair, alors son carré est impair. »

(a) Quel type d'entier faudrait-il trouver pour rendre chacune de ces deux phrases fausse ?

(b) Que remarquez-vous ? En déduire pourquoi la démonstration de Lina suffit à établir (A).

La seconde phrase est appelée la **contraposée** de la première. Plus généralement, la contraposée de « si A, alors B » est « si non B, alors non A ». Une affirmation et sa contraposée expriment la même exigence, mais en regardant la situation depuis l'autre côté.

IV Qui avait réellement démontré ?

8 Revenir à vos premières impressions.

(a) Les essais de Nora démontrent-ils (A) ? Que montrent-ils réellement ?

(b) Sam a-t-il démontré (A) ? Quelle affirmation a-t-il exactement démontrée ?

(c) Pourquoi Lina a-t-elle, elle, réellement démontré (A) ?

Sam a démontré un sens et Lina a démontré l'autre. On peut donc dire :

« Un entier est pair si et seulement si son carré est pair. »

Si et seulement si signifie ici que les deux sens sont vrais. Ainsi, un entier et son carré ont toujours la même parité : pair avec pair, impair avec impair. Le résultat se reformule donc aussi : **« Un entier est impair si et seulement si son carré est impair. »**