SOLUTION DÉTAILLÉE

Reprendre les maths · SOLUTION DÉTAILLÉE

Parcours n°03 — Qu'est-ce qu'un raisonnement correct ?

AU PROGRAMME

Raisonnement logique · Parité · Calcul littéral

I Deux histoires, une même façon de raisonner

1

La seule règle connue est : « Toute personne qui possède un badge Or peut entrer dans la salle Atlas. » Elle affirme une chose précise : **le badge Or garantit l'accès**. Elle ne dit pas que ce badge est le seul moyen d'entrer.

(a) **Oui.** Alice possède un badge Or. Elle est exactement dans la situation décrite au début de la règle. La règle s'applique donc directement : Alice peut entrer dans la salle Atlas.

(b) **Non.** Bilal peut entrer, mais rien ne dit qu'il possède nécessairement un badge Or. Il pourrait exister une autre autorisation : une invitation, un autre badge, la présence d'un responsable, etc. La règle ne les exclut pas.

Le point essentiel est donc : connaître la conclusion d'une règle ne permet pas toujours de retrouver sa condition de départ.

(c) **Non.** Chloé n'a pas de badge Or. Cela signifie seulement que la règle donnée ne nous garantit pas son accès. Elle pourrait malgré tout entrer par un autre moyen. « La règle ne me permet pas de conclure qu'elle entre » n'est pas la même chose que « la règle me permet de conclure qu'elle n'entre pas ».

(d) **Oui.** David ne peut pas entrer. S'il possédait un badge Or, la règle garantirait au contraire qu'il peut entrer. Comme ce n'est pas le cas, David ne peut pas posséder de badge Or.

Cette dernière conclusion est importante : on ne retourne pas simplement la règle. On constate que si la condition de départ était présente, la conséquence devrait l'être aussi ; puisque la conséquence est absente, la condition de départ ne peut pas être présente.

2

La règle est maintenant : « Toute tasse qui chante possède une anse rouge. » L'histoire est volontairement étrange, mais chaque propriété est facile à comprendre.

(a) **La tasse de Léa possède une anse rouge.** Elle chante, donc la règle s'applique directement.

(b) **On ne peut pas conclure qu'elle chante.** Une tasse peut avoir une anse rouge sans chanter. La règle décrit les tasses qui chantent ; elle ne dit pas que toutes les tasses à anse rouge chantent.

(c) **On ne peut pas conclure que son anse n'est pas rouge.** Une tasse silencieuse peut malgré tout avoir une anse rouge. La règle ne dit rien qui l'interdise.

(d) **Oui, on peut conclure qu'elle ne chante pas.** Si la tasse de Sami chantait, la règle lui imposerait une anse rouge. Or son anse n'est pas rouge. Elle ne chante donc pas.

3

Les deux histoires parlent de choses très différentes, mais elles ont la même **structure**.

Dans le bâtiment, la règle dit : si une personne possède le badge Or, alors elle peut entrer dans Atlas.

Dans le café imaginaire, la règle dit : si une tasse chante, alors elle possède une anse rouge.

Dans les deux cas, partir de la première propriété permet d'obtenir la seconde. Mais partir de la seconde ne permet pas automatiquement de retrouver la première.

La **réciproque** d'une phrase « si A, alors B » est la phrase « si B, alors A ». Ces deux phrases sont différentes. L'une peut être vraie sans que l'autre le soit.

Par exemple, « si une personne possède le badge Or, elle peut entrer » peut être vraie alors que « si une personne peut entrer, elle possède le badge Or » est fausse.

IDÉE Pour juger un raisonnement, il faut donc regarder dans quel sens l'information est donnée. Deux phrases qui emploient les mêmes mots peuvent ne pas affirmer la même chose.

II Sam a-t-il démontré la bonne chose ?

4

(a) Le parcours rappelle la manipulation utile : si $n = 2k$, alors $(2k)^2 = 2^2k^2 = 4k^2$. Voyons pourquoi cette manipulation répond exactement à la question.

Dire que n est pair signifie d'abord qu'il est un multiple de 2. Pour un entier positif, on peut se représenter cela comme des paquets de deux sans reste. Mathématiquement, cela signifie que l'on peut écrire

$$n = 2k,$$

où k est un entier.

Élevons cette égalité au carré :

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

La dernière forme est la plus importante. Elle montre que n^2 est **deux fois un entier**, puisque $2k^2$ est un entier. C'est exactement ce que signifie « n^2 est pair ».

Nous avons donc démontré : **si un entier est pair, alors son carré est pair**.

(b) Or (A) disait : **si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair**.

Sam a donc démontré la même relation, mais dans l'autre sens. Sa phrase est la **réciproque** de (A).

Son calcul est parfaitement correct. Ce qui serait incorrect serait d'en déduire automatiquement que (A) est vraie. La première partie nous a montré qu'une phrase et sa réciproque peuvent avoir des valeurs différentes.

C'est une distinction essentielle : on peut faire un calcul juste et néanmoins ne pas avoir démontré la phrase demandée.

5

(a) Nora a vérifié beaucoup de nombres. C'est utile : ces essais rendent (A) plausible et peuvent aider à deviner la bonne propriété. Mais (A) parle de **tous les entiers**.

Même mille essais ne concernent que mille nombres. Il reste toujours d'autres entiers non testés. Une propriété peut être vraie pour beaucoup de valeurs et échouer plus loin. Les essais de Nora sont donc des indices, pas une preuve générale.

(b) Pour montrer que (A) est fausse, un seul exemple suffirait, mais il faudrait qu'il contredise exactement la phrase. Il faudrait trouver :

- un entier dont le carré est pair ;
- alors que cet entier est impair.

Un tel entier vérifierait le début de (A), mais pas sa conclusion. Ce serait un **contre-exemple**.

Ainsi, une affirmation générale présente une dissymétrie importante : beaucoup d'exemples favorables ne suffisent pas à la prouver, tandis qu'un seul contre-exemple suffit à la réfuter.

III Lina regarde la question de l'autre côté

6

Le parcours rappelle ici l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = 2k$ et $b = 1$, elle donne

$$(2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2.$$

Nous allons maintenant l'utiliser et surtout interpréter le résultat obtenu.

Dire que n est impair signifie qu'il n'est pas pair. Pour un entier positif, on peut se représenter cela en formant des paquets de deux : il reste alors une unité. L'écriture mathématique correspondante est

$$n = 2k + 1,$$

où k est un entier.

Calculons son carré :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Là encore, regardons le sens de la dernière ligne. Elle dit que n^2 est **deux fois un entier, puis encore une unité**. En effet, $2k^2 + 2k$ est un entier.

C'est exactement la forme d'un nombre impair. Rappelons qu'un entier n'a que ces deux possibilités : il est pair ou impair. Nous avons donc démontré : **si un entier est impair, alors son carré est impair**.

7

(a) Prenons d'abord (A) : « Si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair. »

Pour rendre cette phrase fausse, il faudrait que son point de départ soit vrai et sa conclusion fausse. Il faudrait donc trouver **un entier impair dont le carré est pair**.

Prenons maintenant la phrase de Lina : « Si un entier est impair, alors son carré est impair. »

Pour la rendre fausse, il faudrait encore trouver **un entier impair dont le carré est pair**.

(b) Nous obtenons exactement le même type de contre-exemple dans les deux cas. Les deux phrases échoueraient donc dans la même situation, et seulement dans cette situation.

C'est pour cette raison qu'elles expriment la même exigence logique, même si leurs mots ne sont pas dans le même ordre.

La phrase de Lina est appelée la **contraposée** de (A). Plus généralement, la contraposée de « si A, alors B » est « si non B, alors non A ». Ici, A signifie « le carré est pair » et B signifie « l'entier est pair » ; « non B » signifie donc « l'entier est impair » et « non A » signifie « le carré est impair ». On retrouve exactement la phrase de Lina.

Une affirmation et sa contraposée sont équivalentes : démontrer l'une revient à démontrer l'autre.

Lina a démontré que tout entier impair possède un carré impair. Elle a donc exclu la possibilité d'un entier impair dont le carré serait pair. Autrement dit, elle a exclu tous les contre-exemples possibles à (A). Cela démontre bien (A).

IDÉE La contraposée n'est pas une astuce qui change le problème. Elle décrit exactement la même situation interdite depuis l'autre côté. Son intérêt est que cette nouvelle formulation peut être plus facile à démontrer.

IV Qui avait réellement démontré ?

8

(a) **Nora n'a pas encore démontré (A).** Ses essais sont utiles : ils montrent que l'affirmation fonctionne pour tous les nombres testés et la rendent donc plausible. Mais, comme nous l'avons vu à la question 5, (A) parle de tous les entiers. Une liste d'essais, aussi longue soit-elle, ne couvre jamais tous les cas.

Autrement dit, Nora possède des **indices** en faveur de (A), pas une preuve générale. Un seul contre-exemple — un entier impair dont le carré serait pair — suffirait d'ailleurs à réfuter (A).

(b) **Sam a bien fait une démonstration, mais il n'a pas démontré (A).** Il a établi que si un entier est pair, alors son carré est pair. C'est la **réciproque** de (A), qui dit au contraire : si le carré est pair, alors l'entier est pair. Son calcul est correct ; c'est le sens de la conclusion qui n'est pas celui demandé.

(c) **Lina a bien démontré (A).** Elle a établi que si un entier est impair, alors son carré est impair. À la question 7, nous avons vu que cette phrase est la **contraposée** de (A) : les deux seraient mises en défaut par exactement le même objet, un entier impair dont le carré serait pair.

En montrant qu'un tel entier ne peut pas exister, Lina élimine donc tous les contre-exemples possibles à (A). Elle ne répète pas les mots de (A), mais elle démontre une formulation qui lui est équivalente.

Le bilan est maintenant clair : Nora a des observations ; Sam a une preuve correcte dans le sens réciproque ; Lina a une preuve de la contraposée, donc une preuve de (A).

Nous disposons maintenant des deux directions :

- si l'entier est pair, alors son carré est pair ;
- si son carré est pair, alors l'entier est pair.

C'est exactement ce que signifie « **si et seulement si** ». L'expression ne cache pas une nouvelle notion : elle rassemble simplement les deux directions d'une même relation.

Nous pouvons donc conclure :

> *Un entier est pair si et seulement si son carré est pair.*

En particulier, **un entier et son carré ont toujours la même parité** : pair avec pair, impair avec impair.

On peut donc exprimer exactement le même bilan du côté des nombres impairs :

> *Un entier est impair si et seulement si son carré est impair.*

Les deux sens sont bien présents. Lina a démontré que si l'entier est impair, son carré est impair. Pour l'autre sens, si le carré est impair, l'entier ne peut pas être pair, car Sam a démontré qu'un entier pair a toujours un carré pair ; l'entier est donc impair.

La leçon logique du problème tient en une phrase : une démonstration correcte doit établir exactement ce que l'on affirme, ou une formulation dont on a justifié qu'elle lui est équivalente. Les exemples peuvent guider ; une réciproque doit être distinguée de la phrase initiale ; une contraposée peut fournir une autre voie vers la même conclusion.