Reprendre les maths · PARCOURS GUIDÉ

Parcours n°01 — Faut-il vraiment tout vérifier ?

AU PROGRAMME

Raisonnement logique · Implication et contraposée · Nombres premiers

> *Pour savoir si une règle est respectée, faut-il vraiment tout vérifier ? Pas toujours. Certaines informations sont utiles ; d'autres ne peuvent rien changer. Nous allons commencer par quelques situations simples, puis voir comment la même idée aide à raisonner avec des nombres.*

Pour vous lancer

Vous n'avez besoin d'aucun cours de logique. Un seul symbole sera introduit plus loin : $\Rightarrow$. Il se lit « implique » et abrège simplement « si…, alors… ». Lorsqu'une écriture mathématique apparaît, son sens est expliqué au moment où elle est utilisée.

I Contrôler sans tout vérifier

Chaque voyageur possède deux informations : son type de billet — **tarif réduit** ou **plein tarif** — et la présence ou non d'un justificatif valable.

Pour chacun des quatre dossiers ci-dessous, une seule information est visible. Ouvrir le dossier permet de connaître l'autre.

Tarif réduit — Plein tarif — Justificatif présent — Justificatif absent

La règle à contrôler est :

« Toute personne qui utilise un tarif réduit doit posséder un justificatif valable. »

1 Quels dossiers faut-il ouvrir ? Le but est d'en ouvrir le moins possible, sans risquer de laisser passer une violation de la règle.

Pour chaque dossier choisi, expliquez ce que vous cherchez à vérifier. Expliquez aussi pourquoi les autres peuvent rester fermés.

2 Dans un festival fictif, la règle est maintenant :

« Toute personne qui consomme une boisson alcoolisée doit avoir au moins 18 ans. »

Pour quatre personnes, on ne connaît pour l'instant que les informations suivantes :

Boit une bière — Boit un soda — 16 ans — 25 ans

Pour chaque personne, on peut vérifier l'autre information : son âge ou sa boisson.

Quelles personnes faut-il contrôler, en en contrôlant le moins possible ? Puis décrivez en une phrase ce qui ferait échouer la règle.

II Quand le décor disparaît

Quatre cartes sont posées sur une table. Chacune porte un entier sur une face et une couleur sur l'autre. La couleur est toujours bleue ou verte.

Une seule face de chaque carte est visible :

On veut contrôler la règle suivante :

« Si une carte porte un nombre pair sur une face, alors elle est bleue sur l'autre face. »

3 Quelles cartes faut-il retourner, et seulement celles-là ? Pour chaque carte, dites pourquoi elle doit être retournée ou pourquoi elle peut rester telle quelle.

4 Retrouvez le rôle de chaque carte dans la première situation : *tarif réduit, plein tarif, justificatif présent, justificatif absent.* Expliquez brièvement les quatre correspondances.

5 Complétez cette phrase sans reprendre les exemples précédents :

Une règle « si..., alors... » est fausse exactement lorsqu'on rencontre un cas où...

III Une flèche pour écrire plus court

Considérons l'affirmation :

« Si un entier est multiple de 6, alors il est multiple de 3. »

On peut l'écrire plus brièvement :

$$\text{multiple de } 6 \Rightarrow \text{multiple de } 3.$$

La flèche $\Rightarrow$ se lit **« implique »**. Elle remplace simplement les mots « si..., alors... ».

La phrase obtenue en échangeant le départ et l'arrivée s'appelle la **réciproque**. Ici :

« Si un entier est multiple de 3, alors il est multiple de 6. »

Une autre phrase, appelée la **contraposée**, est ici :

« Si un entier n'est pas multiple de 3, alors il n'est pas multiple de 6. »

Nous allons voir ce qu'elle a de particulier.

6 **(a)** Expliquez pourquoi l'affirmation

$$\text{multiple de } 6 \Rightarrow \text{multiple de } 3$$

est vraie. Vous pouvez utiliser le fait que

$$6 = 3 \times 2.$$

(b) La réciproque est-elle vraie ? Si non, donnez un contre-exemple.

(c) Quel type de nombre ferait échouer l'affirmation de départ ? Quel type de nombre ferait échouer sa contraposée ? Que remarquez-vous ?

IV Regarder une affirmation de l'autre côté

Un entier est **pair** lorsqu'il est divisible par 2 ; sinon, il est **impair**.

Un entier supérieur à 1 est dit **premier** lorsqu'il n'a que deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Par exemple, 2, 3, 5 et 7 sont premiers. En revanche, 9 ne l'est pas, car

$$9 = 3 \times 3.$$

On veut établir l'affirmation suivante :

« Si un entier strictement supérieur à 2 est premier, alors il est impair. »

7 **(a)** Écrivez la contraposée de cette affirmation en français.

(b) Expliquez pourquoi cette contraposée est vraie.

Indication : un entier pair est divisible par 2 ; s'il est strictement supérieur à 2, que peut-on dire du diviseur 2 ?

(c) Pourquoi cela suffit-il pour établir l'affirmation de départ ?

V Un seul cas peut suffire

Vous pouvez utiliser une calculatrice pour les vérifications numériques de cette partie. L'étape importante n'est pas de calculer vite, mais de comprendre ce que les essais permettent réellement de conclure.

Dans cette partie, la lettre n représente simplement un entier naturel :

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Le symbole n^2 signifie $n \times n$.

On considère l'affirmation :

« Pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + n + 41$ est premier. »

Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, on obtient respectivement

$$41, \quad 43, \quad 47, \quad 53, \quad 61, \quad 71,$$

qui sont tous premiers.

8 **(a)** Ces six vérifications suffisent-elles à démontrer que l'affirmation est toujours vraie ? Expliquez.

(b) Prenons maintenant $n = 40$. Pour éviter un gros calcul, commencez par écrire

$$\begin{aligned} 40^2 + 40 &= 40 \times 40 + 40 \times 1 \\ &= 40 \times (40 + 1) \\ &= 40 \times 41. \end{aligned}$$

Utilisez cette égalité pour montrer que

$$40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41.$$

Vous pouvez vérifier le résultat à la calculatrice si vous le souhaitez.

(c) Pourquoi le nombre obtenu n'est-il pas premier ? Que peut-on alors conclure sur l'affirmation ?

(d) Quel rôle joue la valeur $n = 40$? Formulez le principe général illustré ici : que suffit-il de trouver pour réfuter une affirmation qui prétend être vraie dans tous les cas ?

Du premier contrôle jusqu'au dernier calcul, la même question revient : non pas « qu'est-ce qui semble confirmer la règle ? », mais « qu'est-ce qui pourrait réellement la rendre fausse ? ».