SOLUTION DÉTAILLÉE

Reprendre les maths · SOLUTION DÉTAILLÉE

Parcours n°01 — Faut-il vraiment tout vérifier ?

AU PROGRAMME

Raisonnement logique · Implication et contraposée · Nombres premiers

I Contrôler sans tout vérifier

1

Il faut ouvrir exactement deux dossiers : **Tarif réduit** et **Justificatif absent**.

Pour le dossier *Tarif réduit*, il faut regarder si un justificatif est présent. S'il est absent, la règle est violée.

Pour le dossier *Justificatif absent*, il faut regarder le type de billet. S'il est à tarif réduit, la règle est violée.

Le dossier *Plein tarif* peut rester fermé : la règle n'impose rien aux personnes qui paient plein tarif.

Le dossier *Justificatif présent* peut aussi rester fermé : quel que soit le type de billet, aucune violation de cette règle ne peut se cacher derrière cette information.

Le minimum est donc bien de deux contrôles.

IDÉE Une règle de la forme « si..., alors... » est mise en défaut lorsque le « si » est vérifié mais que le « alors » ne l'est pas.

2

Il faut contrôler la personne qui **boit une bière** et la personne qui a **16 ans**.

Pour la première, il faut vérifier l'âge : si elle a moins de 18 ans, la règle est violée.

Pour la seconde, il faut vérifier la boisson : si elle consomme de l'alcool, la règle est violée.

La personne qui boit un soda n'a pas besoin d'être contrôlée, car la règle ne concerne que les boissons alcoolisées.

La personne de 25 ans n'a pas besoin d'être contrôlée non plus : même si elle consomme de l'alcool, la condition d'âge est satisfaite.

Une violation serait donc : **consommer de l'alcool tout en ayant moins de 18 ans**.

II Quand le décor disparaît

3

Il faut retourner exactement les cartes **8** et **VERT**.

La carte 8 montre un nombre pair. Il faut donc vérifier que l'autre face est bleue. Une face verte ferait échouer la règle.

La carte VERT montre que la conséquence attendue, « être bleue », est absente. Il faut donc vérifier que l'autre face n'est pas paire. Un nombre pair derrière cette carte ferait échouer la règle.

La carte 5 peut rester telle quelle : 5 est impair, et la règle ne dit rien sur la couleur des cartes impaires.

La carte BLEU peut également rester telle quelle : une carte bleue peut avoir un nombre pair ou impair. La règle dit

$$\text{pair} \Rightarrow \text{bleu},$$

elle ne dit pas

$$\text{bleu} \Rightarrow \text{pair}.$$

4

Les correspondances sont :

$$8 \longleftrightarrow \text{tarif réduit}, \qquad 5 \longleftrightarrow \text{plein tarif},$$
$$\text{BLEU} \longleftrightarrow \text{justificatif présent}, \qquad \text{VERT} \longleftrightarrow \text{justificatif absent}.$$

Le nombre pair et le tarif réduit correspondent au cas où la condition de départ est satisfaite.

Le bleu et le justificatif présent correspondent au cas où la conséquence attendue est satisfaite.

Le décor change, mais la structure est la même.

5

On peut compléter ainsi :

> *Une règle « si..., alors... » est fausse exactement lorsqu'on rencontre un cas où la condition de départ est vraie, mais la conséquence annoncée est fausse.*

III Une flèche pour écrire plus court

6

(a) Un multiple de 6 s'obtient en multipliant 6 par un entier. Or

$$6 = 3 \times 2.$$

Tout multiple de 6 contient donc aussi un facteur 3. Il est donc multiple de 3.

Ainsi,

$$\text{multiple de } 6 \Rightarrow \text{multiple de } 3.$$

(b) La réciproque serait :

> *« Si un entier est multiple de 3, alors il est multiple de 6. »*

Elle est fausse. Par exemple, 3 est multiple de 3 mais pas de 6. Le nombre 3 est donc un **contre-exemple**.

(c) Pour rendre fausse l'affirmation de départ, il faudrait trouver un entier qui soit **multiple de 6 mais pas multiple de 3**.

Pour rendre fausse sa contraposée, il faudrait encore trouver un entier qui soit **multiple de 6 mais pas multiple de 3**.

C'est exactement la même situation impossible.

Une implication et sa contraposée ont donc les mêmes contre-exemples possibles : elles expriment la même exigence, vue depuis deux côtés différents.

IV Regarder une affirmation de l'autre côté

7

(a) La contraposée est :

« Si un entier strictement supérieur à 2 est pair, alors il n'est pas premier. »

(b) Un entier pair est divisible par 2.

S'il est strictement supérieur à 2, le nombre 2 est différent de 1 et différent de l'entier lui-même. Il possède donc un diviseur supplémentaire.

Or un nombre premier ne doit avoir que deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Un entier pair strictement supérieur à 2 ne peut donc pas être premier. La contraposée est démontrée.

(c) Une affirmation et sa contraposée expriment la même exigence logique. Puisque la contraposée est vraie, l'affirmation de départ l'est aussi :

Tout nombre premier strictement supérieur à 2 est impair.

IDÉE La contraposée ne change pas ce qui est interdit par la règle : elle décrit la même possibilité de contre-exemple depuis l'autre côté. Elle peut simplement être plus facile à démontrer.

V Un seul cas peut suffire

8

(a) Non.

Les six valeurs données montrent seulement que l'affirmation fonctionne pour

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Or elle prétend être vraie pour **tout** entier naturel.

Quelques exemples favorables ne suffisent donc pas à la démontrer.

(b) On part de l'égalité donnée :

$$\begin{aligned} 40^2 + 40 &= 40 \times 40 + 40 \times 1 \\ &= 40 \times (40 + 1) \\ &= 40 \times 41. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 40^2 + 40 + 41 &= 40 \times 41 + 41 \\ &= 40 \times 41 + 1 \times 41 \\ &= (40 + 1) \times 41 \\ &= 41 \times 41. \end{aligned}$$

(c) Le nombre 41×41 possède notamment le diviseur 41, différent de 1 et du nombre lui-même.

Il n'est donc pas premier.

L'affirmation

« Pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + n + 41$ est premier. »

est donc fausse.

(d) La valeur $n = 40$ est un **contre-exemple** : elle suffit à faire échouer une affirmation qui prétendait être vraie dans tous les cas.

IDÉE Pour réfuter une affirmation générale, un seul contre-exemple suffit. En revanche, même beaucoup d'exemples favorables ne constituent pas, à eux seuls, une démonstration.

Le lien avec les premières parties est le même : pour tester efficacement une règle, il faut chercher la situation qui pourrait réellement la rendre fausse, et non accumuler des cas qui la confirment.